FÜMO 27 2. Runde Lösungen 8. Klasse

Aufgabe 1 Folgsamer Anhang

Sei $z = n(n+1)$ mit $n \in N$.

a) Es ist $n(n+1)\cdot 100 + 25 = 100n^2 + 100n + 25 = (10n + 5)^2$

b) 1. Fall: $n(n+1)$ ist einstellig: $q = 250 + n(n+1)$ => für $n = 2$ ist $q = 256$

2. Fall: $n(n+1)$ ist zweistellig: $q = 2500 + n(n+1)$ => da $51^2 = 2601$ gibt es keine Lösung.

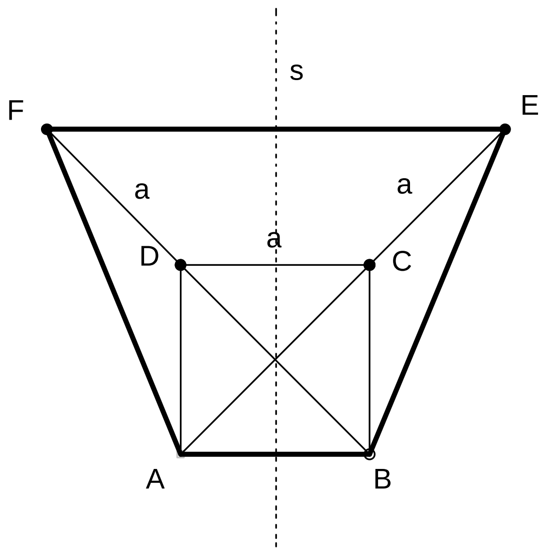
3. Fall: $n(n+1)$ ist dreistellig: $q = 25000 + n(n+1)$ => $158^2 < q < 162^2$
$159^2 = 25281 = 25000 + 281$, $160^2 = 25600 = 25000 + 600$, $161^2 = 25921 = 25000 + 921$,
$z = 600 = 24\cdot 25$ ist folgsam, 281 und 921 aber nicht. D.h. 600 ist eine Lösung.

4. Fall: $n(n+1)$ ist vierstellig: $q = 250000 + n(n+1)$ => $500^2 < q < 510^2$
501^2, 503^2, 505^2, 507^2 und 509^2 sind ungerade, also kann keine folgsame Zahl (gerade) entstehen. $502^2 = 252004$, $504^2 = 254016$, $506^2 = 256036$, $508^2 = 258064$.
Da 2004, 4016, 6036 und 8064 keine folgsamen Zahlen sind, gibt es keine weitere Lösung.

Als Lösungen erhält man die folgsamen Zahlen $6 = 2\cdot 3$ und $600 = 24\cdot 25$.

Aufgabe 2 Quadrat im Trapez

Alle Bezeichnungen entnehmen wir der Abbildung.



a) Sei s die Symmetrieachse des Quadrats ABCD, d.h. A‘ = B und D‘ = C. Dann ist BD die Bildgerade von AC und der Kreis $k_2(D, r = a)$ der Bildkreis von $k_1(C, r = a)$. Da E durch AC und k1 (außerhalb von [AC]) eindeutig bestimmt ist, ist F Bildpunkt von E. Damit ist das Trapez ABCD bezüglich s achsensymmetrisch

b) Da das Dreieck AFD gleichschenklig ist, gilt:
<DAC = <AFD. Mit <FDA = 180° - 45° = 135° folgt
<DAF = (180°-135°)/2 = 22,5°, also ist
<BAF = 90° + 22,5° = 112,5° = <EBA (Symmetrie).
Da AB II FE ist <AFE = 180° - 112,5° = 67,5° = <FEB.

Aufgabe 3 Wahrscheinlich geometrisch

Wir können die Menge aller rationalen Zahlen, welche die Ungleichung $x+y > 1$ repräsentieren, in einem Koordinatensystem veranschaulichen. Sie wird dargestellt durch die gefärbte Fläche.
Wegen $y > 1-x$, wird die schräge Seite des Flächenstücks durch ein Teilstück der Geraden $y = 1-x$ begrenzt (s. Figur).
Das Flächenstück liegt wegen $x,y \in [0,2]$ in einem Quadrat der Länge 2. Die gesuchte Wahrscheinlichkeit p ist daher das Verhältnis der Inhalte der gefärbten Fläche A und der Gesamtfläche 4.
Für die Dreiecksfläche gilt: $A_\Delta = 1/2\cdot 1\cdot 1 = 1/2$.
Die gefärbte Fläche A hat damit den Wert A = 4 – ½ = 7/2.
Somit ist die Wahrscheinlichkeit p = 7/2 : 4 = 7/8.