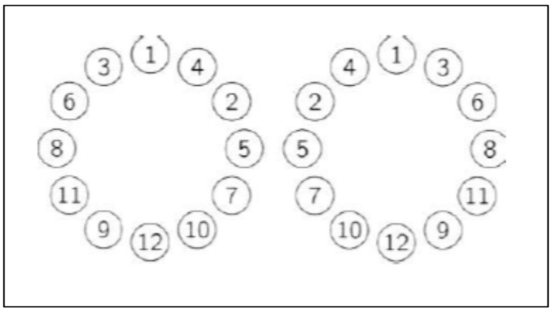
FÜMO 27 2. Runde Lösungen 7. Klasse

Aufgabe 1 Der Mathepensionär

Wir listen alle Produkte mit drei verschiedenen Primzahlen der Größe nach auf:
(1) $2 \cdot 3 \cdot 5 = 30$, dieses Alter ist kein Pensionsalter.
(2) $2 \cdot 3 \cdot 7 = 42$,
(3) $2 \cdot 3 \cdot 11 = 66$,
(4) $2 \cdot 3 \cdot 13 = 78$,
(5) $2 \cdot 3 \cdot 17 = 102$ (dieses Alter wäre zu hoch) oder
(6) $2 \cdot 5 \cdot 7 = 70$.
Jetzt betrachten wir die aktuellen Altersangaben von (2), (3), (6) und (4), die um 1 größer als im Jahr davor sind: 43, 67, 71 und 79. Dieses Zahlen sind alles Primzahlen.
Im nächsten Jahr werden daraus 44, 68, 72 und 80. Wir zerlegen diese Angaben nacheinander in geeignete Produkte aus zwei Faktoren: $44 = 4\cdot 11$, $68 = 4\cdot 17$, $72 = 8\cdot 9$ und $80 = 16\cdot 5$.
Nur die Zahl 72 ist dabei ein Produkt aus einer Quadrat - und einer Kubikzahl. Der ehemalige Mathelehrer ist somit **71** Jahre alt.

Aufgabe 2 Zahlenkreis

Wir ordnen die Zahlen nach Tuvia's Methode und beginnen dabei mit denjenigen Zahlen, für welche nur wenige Nachbarn in Frage kommen.
So können neben der 1 nur die Zahlen 3 und 4 stehen, die 2 kann nur die Nachbarn 4 und 5 haben. Damit erhält Tuvia für die ersten fünf Zahlen die beiden Anordnungen 3-1-4-2-5 oder umgekehrt 5-2-4-1-3. Als Nachbarzahlen der 3 sind nur 1, 5 und 6 möglich. Da die 1 bzw. 5 bereits verwendet worden sind, bleibt neben der 3 nur die 6 übrig. Somit gibt es auch hier nur eine einzige Anordnung, nämlich 6-3-1-4-2-5 oder umgekehrt 5-2-4-1-3-6.
Für die beiden Randzahlen 5 und 6 sind mehrere Anordnungen denkbar, daher schauen wir jetzt auf die 12. Auf ähnliche Weise können neben der 12 nur die beiden Zahlen 10 oder 9 stehen, neben der 11 nur 9 oder 8. Für die 10 bleiben nur die Möglichkeiten 12, 8 oder 7 übrig. Aber 12 und 8 sind schon vergeben und somit gibt es nur die folgende Anordnung für die sechs größten der zwölf Zahlen: 7-10-12-9-11-8 oder umgekehrt 8-11-9-12-10-7.
Jetzt muss Tuvia die beiden Zahlenreihen aus sechs Zahlen nur noch zu einem Kreis verbinden. Das ist aber nur möglich, wenn sie die 5 mit der 7 und die 6 mit der 8 verknüpft. Somit sind 6 und 8 sichere Nachbarn.
Insgesamt findet Tuvia genau zwei mögliche Anordnungen (s. Abb.).



Aufgabe 3 Verschiebe die 1

Es sei $z = 10^n + R$ ($n > 0$; $n \in \mathbb{N}$) die natürliche Zahl, die mit 1 beginnt. R ist dabei eine n-stellige Zahl.
Dann ist $y = 10R + 1$. Nun soll gelten: $y = 3\cdot z$, d.h.

$10R + 1 = 3\cdot(10^n + R) \Leftrightarrow 7R = 3\cdot 10^n - 1 \Leftrightarrow R = \frac{3\cdot 10^n - 1}{7}$

Für welches (kleinste) n ist R eine natürliche Zahl?
Lässt man n von 1 an laufen, erhält man für n = 6 als erstes eine natürliche Zahl für R, nämlich
$R = \frac{3\cdot 10^6 - 1}{7} == 299999 : 7 = 42857.$
Also lautet die gesuchte Zahl z = 142857

Probe: z = 142857 => y = 428571 mit $428571 = 3\cdot 142857$.