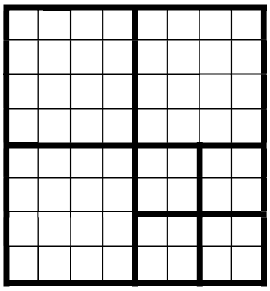
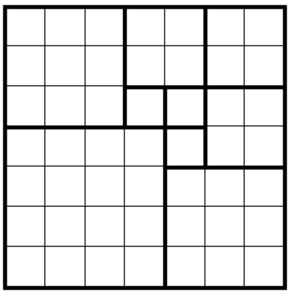
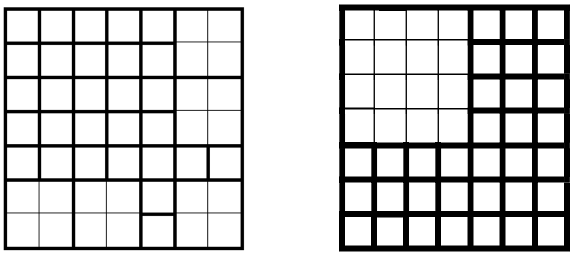
FÜMO 29 1. Runde Lösungen 6. Klasse

Aufgabe 1 Quadrate im Quadrat

a)  b)  c) 

Zu c) Ein 6x6-Quadrat lässt sich in 36 1x1-Quadrate oder in 32 1x1-Quadrate und ein 2x2-Quadrat, also in nur 33 Quadrate zerlegen. Deshalb ist das kleinste Quadrat ein 7x7-Quadrat (siehe Abbildung). Dieses lässt sich in 5 2x2-Quadrate und 29 1x1-Quadrate oder in ein 4x4-Quadrat und 33 1x1-Quadrate zerlegen (siehe Abb.).

Aufgabe 2 Trillige Zahlen

a) Für die Zahlen 1, 2, …, 9 gibt es sieben Möglichkeiten, drei Zahlen aufeinanderfolgen zu lassen: 123, 234, 345, 456, 567, 678 und 789. Zu jeder dieser 7 Möglichkeiten gibt es jeweils 6 Möglichkeiten die drei Zahlen zu vertauschen, z.B. 123, 132, 213, 231, 312, 321.
Also gibt es insgesamt <u>6·7 = 42 trillige Zahlen</u>.

b) Die größte trillige Zahl 987 lässt sich z.B. als Summe 534+453 schreiben; sie ist damit die größte gesuchte Zahl. Nun zur kleinsten derartigen Zahl:
Vorbemerkung: Eine trillige Zahl mit einer Ziffer 2 lässt sich nicht als Summe zweier trilliger Zahlen schreiben. Denn die 2 im Summenwert kann nur durch 1+1 erzeugt werden. Die zu zerlegende trillige Zahl enthält notwendig auch die Ziffer 3, die nun nicht mehr als Summe 1+2 dargestellt werden kann, weil beide Summanden insgesamt nur zwei Ziffern 1 haben. Ein Übertrag ist bei diesen kleinen Ziffern nicht möglich. Die kleinste trillige Zahl ohne 2 ist 345, welches als 132+213 geschrieben werden kann.
<u>345 und 987</u> sind also die <u>gesuchten trilligen Zahlen</u>.

c) Mit 4 gibt es nur die Zahlentripel {2;3;4}, {3;4;5} und {4;5;6}, die nach 2a) jeweils 6 trillige Zahlen ergeben. Nach der Bemerkung in 2b) können Zahlen des ersten Tripels (wegen der Ziffer 2) nicht als Summe trilliger Zahlen geschrieben werden.
Für die kleinsten Zahlen der beiden anderen Tripel gilt: 345 = 132+213 und 456 = 243+213.
Vertauscht man nun in einer Gleichung bei jeder Zahl Hunderter-, Zehner- und Einerziffer in gleicher Weise (Beispiel 3**54** = 1**23**+2**31**), so erhält man wieder eine geeignete Summendarstellung. Daher lässt sich jede der 6 Zahlen der beiden verbleibenden Tripel als Summe trilliger Zahlen schreiben.
Es gibt also genau <u>2 · 6 = 12 trillige Zahlen</u>, die die Bedingungen erfüllen

Aufgabe 3 Die Erbsentreppe

a) $E_2 = 1 + 1 = 2$ (Ausgangserbse und angestoßene aus erster Stufe)
$E_3 = 1 + 2 = 3$ (auf erster Stufe gestartet (= E_1) und auf zweiter Stufe angestoßenen (=E_2))
$E_4 = 2 + 3 = 5$ (auf zweiter Stufe gestartet (= E_2) und auf dritter Stufe angestoßene (= E_3))

b) Entsprechend der Überlegungen von a) lauten die folgenden Erbsenzahlen:
$E_5 = E_3 + E_4 = 3 + 5 = 8$, $E_6 = 5 + 8 = 13$, $E_7 = 8 + 13 = 21$, $E_8 = 13 + 21 = 34$, $E_9 = 21 + 34 = 55$
und schließlich kommen unten $E_{10} = 34 + 55 = \mathbf{89}$ Erbsen an.
(Diese Erbsenzahlen E_n heißen auch Fibonacci-Zahlen.)

c) Hier gilt: $E_1 = 1$, $E_2 = 1 + 2 \cdot 1 = 3$, $E_3 = 2 + 2 \cdot 2 = 6 = 2 \cdot E_2$.
Ab der 3. Stufe werden sowohl die auftreffenden als auch die angestoßenen Erbsen verdoppelt, weshalb die Anzahlen immer weiter verdoppelt werden. Dies bedeutet:
$E_4 = 2 \cdot E_3 = 12$, $E_5 = 24$, $E_6 = 48$, $E_7 = 96$, $E_8 = 192$, $E_9 = 384$. Und schließlich <u>$E_{10} = \mathbf{768}$ Erbsen</u>.