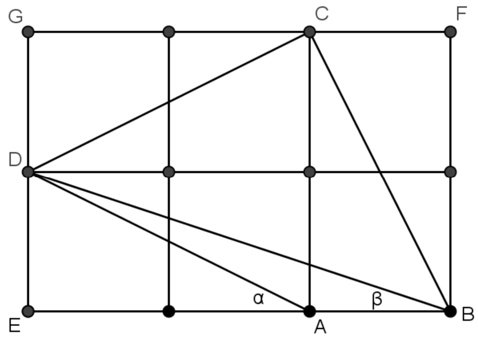
FÜMO 28 1. Runde Lösungen 8. Klasse

Aufgabe 1 Alpha und Beta



Es ist $\Delta EAD \cong \Delta BFC \cong \Delta DCG$ nach SWS,

also ist $\angle FBC = \alpha$ und $\angle DCG = \alpha$ und $\overline{BC} = \overline{DC}$.

Zudem ist $\angle BCF + \angle DCG = 90°$, weil $\angle BCF = 90° - \alpha$.

ΔDBC ist gleichschenklig – rechtwinklig, d.h. $\angle CBD = 45°$

=> $\angle DBE + 45° + \angle FBC = \beta + 45° + \alpha = 90°$ => $\alpha + \beta = 45°$.

Aufgabe 2 SP-Zahlen

a) Zweistellig: 22 (Das ist die einzige!), dreistellig: z.B.123

b) Vierstellig: 1124.
   Die Ziffer 0 darf nicht vorkommen, sonst wird das Querprodukt 0
   Mit 111? geht es nicht, weil die Summe immer größer als das Produkt ist.
   1122 und 1123 passen nicht.

c) $\overline{1x2y1}$ soll SP-Zahl sein, also $1+x+2+y+1 = 1\cdot x\cdot 2\cdot y\cdot 1$ => $x+y+4 = 2xy$

→ $y = \dfrac{-x-4}{1-2x} = \dfrac{4+x}{2x-1}$

x	1	2	3	4	5	6	7	8	9
y	5	2	7/5	8/7	1	10/11	11/13	12/15	13/17

Es gibt genau drei solche Zahlen: 11251 und 15211 (QS=10=QP) und 12221 (QS=8=QP).

Aufgabe 3 Fünf Zahlen, drei Summenwerte

Wir bezeichnen die fünf Zahlen mit a, b, c, d und e und betrachten die vier Summen a+b, a+c, a+d und a+e. Da es nur drei verschiedene Summenwerte gibt, müssen zwei der Summenwerte und damit mindestens zwei der fünf Zahlen gleich sein. Wählt man zwei gleiche Zahlen als Summanden, dann ist der Summenwert gerade, was nur 70 sein kann. Somit kommt die Zahl 35 unter den fünf Zahlen vor, und zwar mindestens zweimal.
Da es aber auch Summenwerte verschieden von 70 gibt ist klar, dass die Zahl 35 nicht fünfmal angeschrieben sein kann. Es kann auch keine zwei weiteren Zahlen doppelt geben, da sonst ebenfalls ein weiterer gerader Summenwert vorhanden sein müsste. Wäre nur eine der Zahlen verschieden von 35, dann hätte es nur zwei verschiedene Summenwerte geben können.
Somit gibt es mindestens zwei von 35 verschiedene Zahlen x und y an der Tafel, wobei gilt: 35+x=57 und 35+y=83 (oder umgekehrt). An der Tafel stehen mithin die Zahlen (57-35=) 22 und (83-35=) 48. Ihre Summe beträgt 22+48 = 70 und ist das dritte Ergebnis.
Wäre die fünfte Zahl z größer als 48, dann wäre $48+z > 2\cdot 48 = 96 > 83$. Daher ist die größte Zahl an der Tafel gleich 48.
Für die fünfte Zahl z kann nur 22+z=57, 35+z=70 und 48+z=83 zutreffen, also z = 35.
An der Tafel stehen somit die Zahlen 22, 35, 35, 35 und 48.