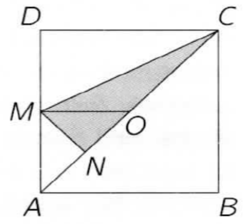
FÜMO 28 1. Runde Lösungen 7. Klasse

Aufgabe 1 Dreieck im Quadrat



Das Quadrat habe den Flächeninhalt Q. Das Dreieck ACD hat dann den Inhalt 0,5·Q. Da M die Mitte von DA ist, besitzen die Dreiecke DMC und MAC den gleichen Inhalt 0,25·Q. Der Punkt O ist der Mittelpunkt des Quadrats und damit ist MO parallel zu AB bzw. CD (Mittenlinie).
Die Dreiecke MOC und OMA sind ebenfalls flächengleich:

$$A_{MOC} = A_{OMA} = \frac{1}{8} \cdot Q.$$

Das Dreieck OMA ist gleichschenklig, da AM = OM (halbe Seitenlänge des Quadrates). Da MN nach Voraussetzung senkrecht auf AO steht, teilt die Höhenlinie MN das Dreieck OMA in zwei flächengleiche Dreiecke. $A_{OMN} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{8} \cdot Q = \frac{1}{16} Q.$

Damit ist der Flächeninhalt A des grauen Dreiecks MNC gleich $A = \frac{1}{8} \cdot Q + \frac{1}{16} \cdot Q = \frac{3}{16} \cdot Q.$

Aufgabe 2 Gibt's noch mehr?

Aus der Tatsache, dass der Nachfolger der Zahl durch 210 = 2· 3· 5· 7 teilbar sein muss, folgt sofort, dass ihre letzte Ziffer 9 sein muss.
Die Quersumme der Zahl muss die Form 3k + 2 haben, da 210 - 1 ≡ 2 mod 3. Aufgrund der ersten Voraussetzung ist die Quersumme gerade. Also ist sie von der Form 3k + 2, gerade, größer als 9 und höchstens 20. Also kommen als Quersummen nur die Zahlen 14 und 20 in Frage, was 7 bzw. 10 Ziffern entspricht. Da sich gerade und ungerade Ziffern abwechseln, sind die kleinsten Lösungszahlen 1010109 und 2101010109 mit den Quersummen 12 und 15, wenn man die
Teilbarkeit durch 7 und den Rest 2 beim Teilen durch 3 unberücksichtigt lässt.
Die Quersumme im zweiten Fall ist ungerade, weshalb eine Quersumme 20 nicht erreicht werden kann. Im ersten Fall müssen wir die Quersumme um 2 vergrößern, also eine Ziffer um 2 erhöhen.
Es kommen also die sechs 7-stelligen Zahlen 3010109, 1210109, 1030109, 1012109, 1010309 und 1010129 in Frage, von denen nur der Nachfolger von 1010309 durch 210 teilbar ist. Demnach erfüllt als einzige Zahl **1010309** alle vier Bedingungen.

Aufgabe 3 Playoff

Wir bezeichnen die Mannschaften, die am Turnier teilnehmen mit A; B; C; D und E. Es sei C die Mannschaft, die alle Heimspiele gewonnen und alle Auswärtsspiele unentschieden gespielt hat.
Diese Mannschaft hat demnach insgesamt 4 · 4 = 16 Punkte erzielt.

Wir zeigen nun, dass diese 16 Punkte nicht unbedingt zum Aufstieg reichen müssen.
Angenommen die Auswärtsspiele von C endeten alle 0 : 0 und die Heimspiele jeweils 1 : 0. Dann hat C 16 Punkte und ein Torverhältnis von +4 erzielt.

Wenn die Mannschaften A und B alle ihre Spiele gegen D und E jeweils mit 3 : 0 gewonnen und gegeneinander jeweils einmal 3 : 0 gewonnen und einmal 0 : 3 verloren haben, haben beide Mannschaften 6 + 6 + 3 + 1 = 16 Punkte (der eine Punkt jeweils zu Hause gegen C).
Beide Mannschaften haben ein Torverhältnis von 6 + 6 + 0 – 1 = +11 erzielt.
Somit liegen beide vor der Mannschaft C und steigen auf.