FÜMO 28 1. Runde Lösungen 6. Klasse

Aufgabe 1 FÜMO macht Spass

Es ist 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 = 28, also auch F + Ü + M + O + S + P + A = 28, weshalb
(F + Ü + M + O + S + P + A) + S + S = 28 + S + S.
Da die linke Gleichungsseite L = F + Ü + M + O genauso groß ist wie die rechte Seite
R = S + P + A + S + S, ist jede Seite halb so groß wie 28 + S + S, also L = 14 + S (= R).

a) Wenn R möglichst groß sein soll, muss S möglichst groß gewählt werden.
Für S = 7 hätte L den Wert 14 + 7 = 21, aber R = 7 + P + A + 7 + 7 wäre sicher größer als 21, da P und A mindestens 1 und 2 als Wert haben. S kann also nicht 7 sein.
Wenn S = 6 ist, gilt L = 14 + 6 = 20, aber R hätte mindestens den Wert 6 + 1 + 2+ 6 + 6 = 21, weshalb S auch nicht 6 sein kann.
Für S = 5 ist L = 14 + 5 = 19 und R = 5 + P + A + 5 + 5 = 15 + P + A. Wenn P + A = 4 (z. B. P = 1 und A = 3) hätte die rechte Seite den Wert 19 und die linke Seite entspricht der Summe der noch nicht verwendeten Zahlen, also 2 + 4 + 6 + 7 = 19. Eine Lösung lautet daher 2 + 4 + 6 + 7 = 5 + 1 + 3 + 5 + 5.

b) Wegen 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 = 35 ist die Summe der beiden Seiten (F+Ü+M+O+S+P+A)+S+S gleich 35+S+S ungerade, weshalb beide Seiten als natürliche Zahlen nicht gleich sein können.

Aufgabe 2 Quadratsummen

Eine Möglichkeit ist folgende:

	3		2		1	
4		5		6		8
	10		9		7	

b) Addiert man die drei Quadratsummen, so werden die beiden mittleren Zahlen (im Beispiel von a: 5 und 6) doppelt gezählt, da sie jeweils Ecken zweier Quadrate sind. Diese beiden mittleren Zahlen können höchstens 9 und 10 sein, weshalb die Gesamtsumme der drei Quadrate höchstens $(1+2+3+4+5+6+7+8+9+10)+9+10=74<3\cdot 25$ ist. Die Quadratsumme muss also kleiner als 25 sein, kann also nicht größer als 24 sein.

c) Die beiden mittleren Zahlen müssen mindestens die Werte 1 und 2 annehmen, weshalb die drei Quadratsummen zusammen mindestens den Wert $(1+2+3+\cdots.+8+9+10)+1+2=58$ haben. Da 58 kein Vielfaches von 3 ist, müssen in der Mitte größere Zahlen auftreten. Die kleinste durch 3 teilbare Zahl größer als 58 ist 60, weshalb die kleinste Quadratsumme 20 beträgt.

Dies ist auch möglich, wie das Beispiel:

	6		7		2	
10		1		4		5
	3		8		9	

zeigt.

Aufgabe 3 Die Treppe

a) Wegen denn Nennern 2, 3 und 8 stellen wir uns eine Treppe mit 24 Stufen (24=kgV(2,3,8)) vor. Bei der 1. Rast hat sie 12 Stufen erstiegen, also noch 12 vor sich. Im 2. Abschnitt schafft sie davon ein Drittel, also 4 Stufen und hat noch 8 Stufen als Rest. Davon klettert sie ein Achtel, also 1 Stufe, hoch und hat 7 Stufen nicht geschafft. Der Anteil des letzten Restes beträgt daher $\frac{7}{24}$ der Gesamttreppe.

b) Wegen der Nenner (vgl. a)) muss die Gesamttreppe ein Vielfaches von 24 Stufen aufweisen. Mögliche Stufenanzahlen sind also: 24, 48, 72, 96, 120, 144,… .
Bei der Stufenhöhe von 15 cm und der Mindestgesamthöhe von 15 m = 1500 cm sind mindestens 100 Stufen nötig; bei der Maximalhöhe 20 m sind es höchstens 2 000cm : 15cm $=\frac{2000}{15}=\frac{400}{3}=133\frac{1}{3}$ Stufen. Die mögliche Stufenanzahl liegt also zwischen 100 und 133. In diesem Bereich ist 120 das einzige Vielfache von 24. Die Treppe hat also 120 Stufen und ist 120 · 15cm = 1800cm = 18m hoch.