FÜMO 27 1. Runde Lösungen 8. Klasse

Aufgabe 1 Zerrissene Streifen

a) z.B. $\boxed{1, 2\ /\ 3}$, da 1 + 2 = 3 oder

$\boxed{64, 65, \ldots, 72\ \ /\ \ 73, 74, \ldots, 80}$, da 64 + 65 + … + 72 = 612 = 73 + 74 + …+ 80

Die Zahlenreihe, die 2018 enthält, beginnt bei 1936 und endet bei 2024 und es gilt:

1936 + 1937 + … + 1980 = 1981 + 1982 + … + 2024 = 88110

b) $\boxed{\mathbf{n, n+1, n+2, \ldots, n+k \quad n+k+1, n+k+2, \ldots, n+k+k}}$

$n\cdot(k+1) + 1 + 2 + 3 + \ldots k = k\cdot(n+k) + 1 + 2 + 3 + \ldots + k \quad \text{II} \ -(1 + 2 + 3 + \ldots + k)$

$\Rightarrow\ n(k+1) = k(n+k)$, also ist $n\cdot k + n = k\cdot n + k^2 \quad \text{II}\ -n\cdot k$, d.h. $n = k^2$

Aufgabe 2 Ein Elftel zerlegt

Aus der Gleichung $\frac{1}{11} = \frac{1}{p1p2} + \frac{1}{p2p3} + \frac{1}{p1p3}$ folgt: $\frac{1}{11} = \frac{p1+p2+p3}{p1p2p3}$

$\Rightarrow p_1p_2p_3 = 11(p_1 + p_2 + p_3)$.

Da 11 eine Primzahl ist, muss eine der Primzahlen p_1, p_2, p_3 den Wert 11 annehmen. Es sei $p_1 = 11$. Dann gilt:

$p_2p_3 = 11 + p_2 + p_3$

$\Rightarrow 11 = p_2p_3 - p_2 - p_3 = p_2(p_3 - 1) - p_3$

$\Rightarrow 12 = p_2(p_3 - 1) - p_3 + 1 = p_2(p_3 - 1) - (p_3 - 1) = (p_2 - 1)(p_3 - 1)$

Da $12 = 1 \cdot 12 = 2\ 6 = 3 \cdot 4$ gilt, kommen für p_2 und p_3 entsprechend nur die Werte (2; 13), (3; 7), (4; 5) in Betracht.

Da nur Primzahlen in Frage kommen, fällt das letzte Paar weg.
Somit erhält man als Lösung: $p_1 = 11$, $p_2 = 2$, $p_3 = 13$ und $p_1 = 11$, $p_2 = 3$, $p_3 = 7$.

Probe:

$$\frac{1}{11\cdot 2} + \frac{1}{11\cdot 13} + \frac{1}{2\cdot 13} = \frac{1}{22} + \frac{1}{143} + \frac{1}{26} = \frac{11+2+13}{11\cdot 2\cdot 13} = \frac{26}{286} = \frac{1}{11}$$

$$\frac{1}{11\cdot 3} + \frac{1}{11\cdot 7} + \frac{1}{7\cdot 3} = \frac{1}{33} + \frac{1}{77} + \frac{1}{21} = \frac{11+3+7}{11\cdot 3\cdot 7} = \frac{21}{231} = \frac{1}{11}$$

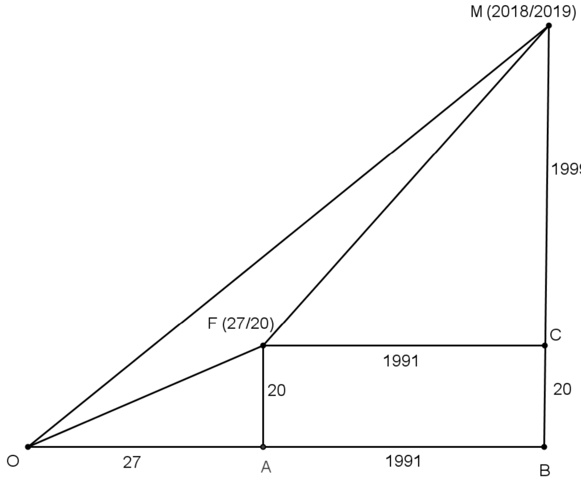
Lösungen sind jeweils alle Permutationen der obigen Zahlen p_1, p_2, p_3.

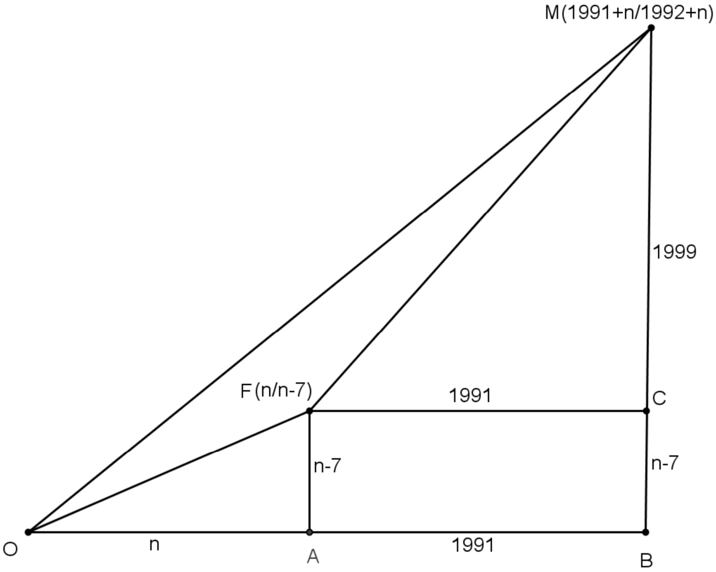
Aufgabe 3 Das FüMO-Dreieck

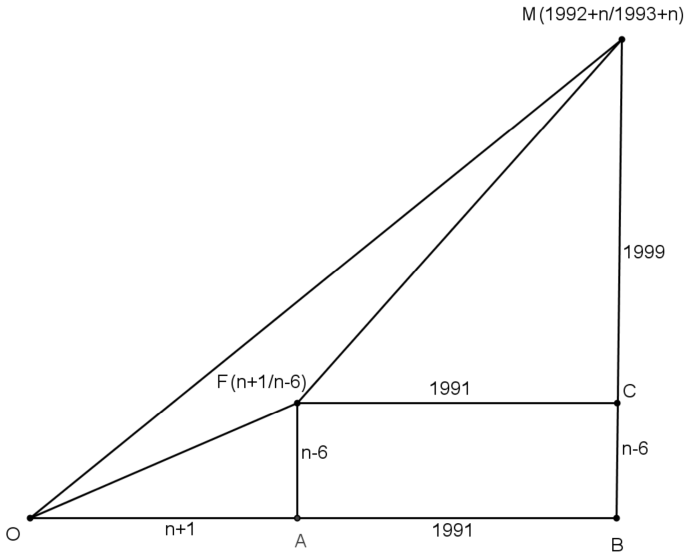
a) $A_{FMO} = A_{BMO} - A_{AFO} - A_{ABCF} - A_{FCM}$

$$= \frac{2018 \cdot 2019}{2} - \frac{27 \cdot 20}{2} - 1991 \cdot 20 - \frac{1991 \cdot 1999}{2}$$

$= 7076{,}5$ Flächeneinheiten







$$A_{FMO} = A_{BMO} - A_{AFO} - A_{ABCF} - A_{FCM} = \frac{(1991+n)\cdot(1992+n)}{2} - \frac{n\cdot(n-7)}{2} - 1991\cdot(n-7) - \frac{1991\cdot 1999}{2}$$

$$A_{FMO} = A_{BMO} - A_{AFO} - A_{ABCF} - A_{FCM} = \frac{(1992+n)\cdot(1993+n)}{2} - \frac{(n+1)\cdot(n-6)}{2} - 1991\cdot(n-6) - \frac{1991\cdot 1999}{2}$$

Vergleich durch Differenzbildung:

$$\frac{(1992+n)\cdot(1993+n)}{2} - \frac{(n+1)\cdot(n-6)}{2} - 1991\cdot(n-6) - \left[\frac{(1991+n)\cdot(1992+n)}{2} - \frac{n\cdot(n-7)}{2} - 1991\cdot(n-7)\right]$$

$$= \frac{(1993+n)\cdot(1992+n) - (1991+n)\cdot(1992+n)}{2} - \frac{n^2-5n-6}{2} + \frac{n^2-7n}{2} - 1991\cdot n + 1991\cdot 6 + 1991\cdot n - 1991\cdot 7$$

$$= \frac{2\cdot(1992+n)}{2} + \frac{n^2-7n-n^2+5n+6}{2} - 1991 = 1992 + n + \frac{6-2n}{2} - 1991 = 1 + n + 3 - n = 4$$

→ Das FüMO-Dreieck wird jedes Jahr um 4 Flächeneinheiten größer.