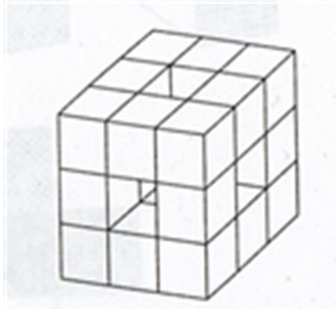
FÜMO 27 1. Runde Lösungen 6. Klasse

Aufgabe 1 Würfelgerüst



Feststellung: Bei gewöhnlichen Spielwürfel ist die Summe der Augenzahlen von gegenüberliegenden Flächen stets 7 (= 1 + 6 = 2 + 5 = 3 + 4).
Ein Würfel hat die Augensumme 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 = 21, die 20 verwendeten Würfel haben (ohne Verklebungen die Augensumme 20 · 21 = 420.
Bei jedem mittleren Würfel einer Kante sind zwei Seiten mit Augensumme 7 verklebt. Da die angeleimten Flächen jeweils gleiche Augenzahlen haben, sind bei jeder Kante von drei Würfeln die Augensumme 2 · 7 = 14 unsichtbar. Der Würfel hat zwölf solche Kanten, weshalb insgesamt 12 · 14 = 168 Augen nicht zu sehen sind.
Damit sind noch 420 – 168 = <u>252 als Augensumme</u> auf den nicht verklebten 72 Flächen sichtbar.
<u>Alternative Lösung</u>:
Die 72 sichtbaren Würfelseiten kann man in Paare mit Augensumme 7 aufteilen. Bei den Mittelwürfel jeder Kante bilden die beiden gegenüberliegenden Seiten solche Paare. Jede sichtbare Seite eines Eckwürfels hat als Partner die gegenüberliegende Seite des anderen Eckwürfels der entsprechenden Kante. (Bei Kantenmittelwürfel sind zwei Flächen mit Augensumme 7 verklebt und die gleichen Zahlen bei den zugehörigen Eckwürfel, weshalb die Endseiten der Kanten ebenfalls die Augensumme 7 haben.) Es gibt also 72 : 2 = 36 verschiedene Paare von sichtbaren Würfelseiten mit jeweils der Augensumme 7. Die Summe der sichtbaren Augenzahlen beträgt damit 36 · 7 = <u>252</u>.

Aufgabe 2 FüMO-Klub

Ein Kind auf einem Stuhl trägt insgesamt 6, ein Kind auf einem Hocker 5 Beine zur Gesamtanzahl bei. Wären es insgesamt 7 Stühle, ergäbe dies 6·7 = 42 Beine, was zu groß ist. In der folgenden Übersicht lassen sich die Fälle von 0, 1, 2, …, 6 Stühlen im Klassenzimmer vollständig durchspielen:

Anzahl Stühle n	0	1	2	3	**4**	5	6
Gesamtzahl Beine 6·n	0	6	12	18	**24**	30	36
Verbleibende Beine 39-6·n	39	33	27	21	**15**	9	3

Die verbleibenden Beine stammen von den Kindern, die auf Hockern sitzen. Diese Anzahl muss durch 5 teilbar sein. Die einzige Möglichkeit der Verteilung auf Stühle und Hocker ist somit bei **n = 4,** d.h. <u>4 Stühle sind im Zimmer</u>.

Aufgabe 3 Erbsenzählerei

a) In der ersten Runde erhält jeder Topf eine Erbse, in der zweiten nur noch Töpfe mit gerader Nummer, in der dritten Runde nur Töpfe, deren Nummer durch drei teilbar sind. Der Topf 24 erhält also nur in den Runden eine Erbse, wenn die Rundenzahl ein Teiler von 24 ist. Der Topf 24 bekommt daher nur in den Runden 1, 2, 3, 4, 6, 8, 12 und 24 je eine Erbse, also genau <u>8 Erbsen</u>.

b) Es kommt nur dann eine Erbse in den Topf, wenn die Rundenzahl ein Teiler der Topfnummer ist. Liegen nur zwei Erbsen in einem Topf, muss seine Nummer eine Primzahl sein, denn nur diese haben genau zwei Teiler: 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, 53, 59, 61, 67, 71, 73, 79, 83, 89, 97, 101, 103, 107, 109, 113, 127, 131, 137, 139, 149, 151, 157, 163, 167, 173, 179, 181, 191, 193, 197, 199. Also liegen <u>in 46 Töpfen</u> genau zwei Erbsen.

c) Normalerweise hat jede Zahl eine gerade Anzahl von Teilern, nur Quadratzahl haben besitzen eine ungerade Anzahl von Teilern. (Jeder Teiler besitzt einen Partner, so dass das deren Produkt die Zahl ergibt, z.B. 24 = 1·24 = …. = 4·6. Für eine ungerade Teileranzahl muss bei einem Teiler der Partner genauso groß sein, z.B. 16 = 1·16 = 2·8 = 4·4 = 4^2) Daher erhalten nur Töpfe mit quadratischer Nummer (1, 4, 9, 16, ..) eine ungerade Anzahl von Erbsen.
Im Bereich bis 200 ist 196 = 14^2 die größte Quadratzahl ($15^2 = 225$ ist zu groß!). Daher enthalten nur die 14 Töpfe <u>1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, 81, 100, 121, 144, 169, 196</u> eine ungerade Erbsenzahl.