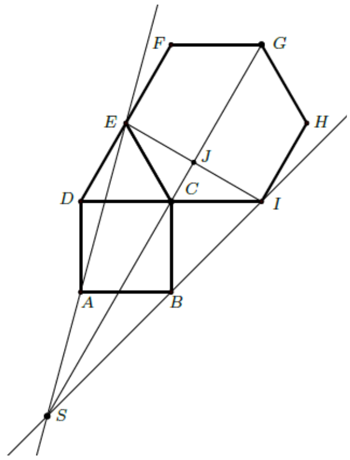
# FÜMO 26 2. Runde Lösungen 8. Klasse

## Aufgabe 1 Drei Punkte auf einer Geraden




Man entnimmt alle Bezeichnungen der Abbildung.

a) Es gilt $\measuredangle ADE = 60° + 90° = 150°$.
Da AD = DE gilt, ist das Dreieck AED gleichschenklig. Daraus folgt
$\measuredangle EAD = \measuredangle DEA$; also ist $\measuredangle EAD = \measuredangle DEA = (180° - 150°):2 = 15°$
und $\measuredangle AEC = 60° - 15° = 45°$.
Weiter gilt $\measuredangle ECB = 60° + 90° = 150°$ und $\measuredangle IBC = 90°:2 = 45°$
Es folgt $\measuredangle CBS = 180° - 45° = 135°$ und weiter
$\measuredangle BSA = 360° - 45° - 150° - 135° = 30°$ (Winkelsumme im Viereck SBCE).

b) Um zu zeigen, dass die Punkte G, C und S auf einer Geraden liegen,
ist zu zeigen, dass gilt: $\measuredangle SCG = \measuredangle SCB + \measuredangle BCI + \measuredangle ICG = 180°$.
Es gilt $\measuredangle ICE = 120°$ (Innenwinkel im regelmäßigen Sechseck).
Da IC = CE, gilt $\measuredangle CEI = \measuredangle CIE$. Also ist $\measuredangle CEI = \measuredangle CIE = (180°-120°):2 = 30°$.
Die Diagonalen CG und IE des regelmäßigen Sechsecks CIHGFE stehen senkrecht aufeinander
und schneiden sich hier im Punkt J. Daraus folgt $\measuredangle ICG = 180°-90° -30° = 60°$.
Wegen der Konstruktion der Ausgangsfigur ist $\measuredangle BCI = 90°$.
Nun gilt für die Winkelsumme im Dreieck SIJ:
$180° = \measuredangle ISJ + \measuredangle SJI + \measuredangle JIS$ bzw. $180° = \measuredangle ISJ + 90° + (30° + 45°)$. Also ist $\measuredangle ISJ = 15°$.
Aus der Winkelsumme im Dreieck SIC folgt, dass $\measuredangle SCI = 180°- 45°- 15° = 120°$ gilt.
Daraus folgt für $\measuredangle SCB = 120°- 90° = 30°$. Also gilt $\measuredangle SCG = 30°+ 90°+ 60° = 180°$, d.h.
die Punkte G, C und S liegen auf einer Geraden.

## Aufgabe 2 Karten ziehen

Die 26 Zahlen lassen sich nach dem Rest, den sie bei der Division durch 6 haben, in sechs Mengen, den so genannten Restklassen zusammenfassen:

M0 = {6; 12; 18; 24} M1 = {1; 7; 13; 19; 25} M2 = {2; 8; 14; 20; 26}
M3 = {3; 9; 15; 21} M4 = {4; 10; 16; 22} M5 = {5; 11; 17; 23}

In M1 und M2 ist jeweils eine Zahl mehr als in den anderen Mengen.
Ohne diese beiden überzähligen Zahlen kann Bertram auf jede Zahl ZA von Alfred so reagieren, dass mit seiner Zahl ZB die Summe der beiden Zahlen ZA+ZB durch 6 teilbar ist (*).
Bertram muss also während des Spiels erreichen, dass die zwei überzähligen Zahlen aus M1 und M2 entfernt werden. Dies kann er auf zwei Arten tun.

(1) Entweder nimmt er, wenn Alfred eine Zahl aus M1 oder M2 entfernt, eine Zahl aus M2 bzw. M1.
Dann kann Bertram die Strategie (*) anwenden und gewinnt.

(2) Nimmt Alfred eine Zahl aus M0 bzw. M3, nimmt Bertram eine Zahl aus M1.
 a) Nimmt Alfred eine Zahl aus M2 oder M1, nimmt Bertram eine Zahl aus M0 bzw. M3 und gewinnt mit Strategie (*).
 b) Nimmt Alfred eine Zahl aus M0 oder M3, nimmt Bertram eine Zahl aus M2.
 Nimmt Alfred eine weitere Zahl aus M0 oder M3, kann Bertram eine Zahl so aus M0 oder M3 entfernen, dass in M0 oder M3 genau zwei Zahlen verbleiben und gewinnt mit der Strategie (*).

In allen Fällen bleiben am Schluss zwei Zahlen aus M0 oder M3 übrig oder je eine Zahl aus M2 und M4 oder je eine Zahl aus M1 und M5, also zwei Zahlen, deren Summe durch 6 teilbar ist.
Damit kann Bertram immer den Sieg erzwingen.

## Aufgabe 3 Quersummelei

Wir schreiben die Zahl N = 999…999 in Dezimaldarstellung: $N = 10^{2018} – 1$.

a) Dann lässt sich die neue Zahl $2·N$ auf diese Weise schreiben: $2·N = 2·10^{2018} – 2 = 1999…9998$
mit 2017 Neunen. Daher ist die Quersumme der Zahl $2·N$ gleich $1+2017·9+8 = 18\,162$.

b) In der Dezimalschreibweise ist
$N^2 = (10^{2018} – 1)^2 = (10^{2018})^2 - 2·10^{2018}·1 + 1 = 10^{4036} - 2·10^{2018} +1 = 10^{2018}·(10^{2018}-2) + 1$.
Nun ist $10^{2018} – 2 = 999…9998$ (mit 2017 Neunen) und daher lässt sich $10^{4036} - 2·10^{2018}$ folgendermaßen vereinfachen: $10^{4036} - 2·10^{2018} = 999…9998000…000$ (2017 Neuner, 2018 Nullen)
Somit gilt: $N^2 = 10^{2018}·(10^{2018}– 2) + 1= 999…9998000…0001$ (2017 Neuner, 2017 Nullen).
Damit ist die Quersumme von $N^2 = 2017·9 + 8 +2017·0 +1 = 2018·9 = 18\,162$ gleich der Quersumme von $2·N$.