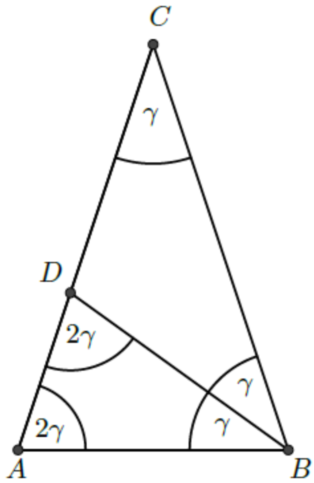
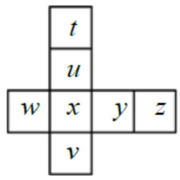
FÜMO 26 2. Runde Lösungen 7. Klasse

Aufgabe 1 Innenwinkel im Dreieck



Aus [AB] = [BD] folgt $\sphericalangle BAD = \sphericalangle ADB$.
Aus [BD] = [DC] folgt $\sphericalangle CBD = \sphericalangle DCB = \gamma$.
Da [BD] die Winkelhalbierende des Winkels $\sphericalangle CBA$ ist,
folgt $\gamma = \sphericalangle DBA = \sphericalangle CBD = \sphericalangle DCB$.
Die Winkelsumme im Dreieck DBC beträgt 180°.
Also gilt $\sphericalangle BDC = 180° - 2\gamma$.
Da der Winkel $\sphericalangle ADB$ Nebenwinkel des Winkels $\sphericalangle BDC$ ist, gilt
$\sphericalangle ADB = 180° - (180° - 2\gamma) = 2\gamma$.
Die Winkelsumme im Dreieck ABC beträgt 180°.
Also gilt $\sphericalangle CAB = 180° - (180° - 2\gamma) = 2\gamma$.
Also gilt für das Dreieck ABC: $\gamma + 2\gamma + 2\gamma = 5\gamma = 180° \Rightarrow \sphericalangle ACB = 36°$.

Aufgabe 2 Ein Kreuz mit Zahlen



Wir bezeichnen die Zahlen in den Leerfeldern wie in der Figur.
Die betrachteten Summen haben nach Voraussetzung die Summe (w+x+y+z) + (t+u+x+v) = 2·21 = 42. Da das Feld x doppelt gezählt wird, können wir die Summe umordnen: (t+u+v+w+x+y+z) + x = 42.
Ebenfalls nach Voraussetzung besitzt die Summe in der Klammer den Wert 2+3+4+5+6+7+8 = 35. Also kann x nur den Wert 7 haben. Somit sind für die Zahlen t, u, v bzw. w, y, z nur die Werte 2, 3, 4, 5, 6 oder 8 möglich unter der Einschränkung t+u+v = w+y+z = 21 - 7 = 14.
Durch Probieren findet man, dass nur die Tripel 2, 4, 8 und 3, 5, 6 die Summe 14 ergeben.
Stehen also in der waagrechten Reihe zum Beispiel die Zahlen 2, 7, 4, 8, dann gibt es für die Zahl w drei Möglichkeiten, für die Zahl y noch zwei und nur noch eine für die letzte Zahl, insgesamt also 6 Möglichkeiten. Entsprechend gibt es noch 6 Möglichkeiten für die Zahlen 3, 5, 7, 6 in der senkrechten Spalte. Das sind zusammen 6·6 = 36 Kombinationen. Da aber die Zahlen 2, 7, 4, 8 aus der waagrechten Reihe auch in der senkrechten Spalte stehen können, verdoppelt sich die Gesamtzahl aller Möglichkeiten. Die Belegung ist daher auf 72 verschiedene Arten möglich.

Aufgabe 3 Vermittlung

a) Die größte gesuchte Zahl sei x. Die Zahl x ist dann am größten, wenn die restlichen Zahlen so klein wie möglich sind, also jeweils 1.
Dies führt zu der folgenden Gleichung (1 + 1 + … + 1 + x) : 2018 = 2018
Durch Umstellen der Gleichung folgt: $x = 2018^2 - 2017 = 4072324 – 2017 = 4\,070\,307$.
Diese Zahl liegt auch unter der Grenze 20 182 018.

b) Jetzt sollen alle Zahlen verschieden sein. Hier ist die Wahl der Summanden 1, 2, …, 2017 optimal, d. h. wir setzen S = 1 + 2 +…+ 2017 (S ist die kleinste Summe aus 2017 verschiedenen positiven ganzen Zahlen).
Damit erhalten wir den folgenden Ansatz: (S + x) : 2018 = 2018.
Auflösen nach x liefert: $x = 2018^2 - S$.
Nach der bekannten Gauss-Formel können wir S berechnen:
S = (2017·2018):2 = 2035153.
Damit lässt sich x angeben. Es ist $x = 2018^2 – 2035153 = 2\,037\,171$.
Auch diese Zahl ist kleiner als 20 182 018.