

FÜMO 26 1. Runde Lösungen 8. Klasse

Aufgabe 1 26° im 2017-Eck

Die Winkelsumme im konvexen 2017-Eck beträgt $2017 \cdot 180^\circ = 362700^\circ$.

Die gesuchte Anzahl der Winkel mit der Größe 26° sei x . Da es sich um ein konvexes 2017-Eck handelt, ist jeder der 2017 Innenwinkel kleiner als 180° .

Also gilt:

$$362700 - x \cdot 26 < 180 \cdot (2017 - x)$$

$$362700 - x \cdot 26 < 363060 - 180 \cdot x$$

$$180 \cdot x - x \cdot 26 < 360$$

$$154 \cdot x < 360$$

$$\Leftrightarrow x < 2,33$$

Also kann ein konvexes 2017-Eck höchstens zwei Innenwinkel der Größe 26° haben.

Aufgabe 2 2017 versteckt

Die Zahl bzw. Teilzahl „2017“ ist 13 mal in den folgenden Zahlen enthalten:

2017, 12 017, 22 017 sowie von 20 170 bis 20 179.

Der Ausschnitt „2017“ kann aber auch zu zwei verschiedenen Zahlen gehören.

Wir unterscheiden dabei drei Fälle:

2|017 Dies ist aber nicht möglich, da die zweite Zahl eines betrachteten Paares nicht mit „0“ fortgesetzt werden kann.

20|17 Diese Anordnung kann insgesamt 11mal auftreten und zwar zwischen 1720|1721, 17 020|17 021 bis 17 920|17 921.

201|7 Diese Kombination gibt es nur einmal, nämlich in 7201|7202.

Damit erscheint in der Computerzeile insgesamt $13+11+1 = 25$ mal die Zahlenkombination 2017 in dieser Reihenfolge.

Aufgabe 3 Besonders folgsam

Seien $a = m(m+1)$ und $b = n(n+1)$ mit $m, n \in \mathbb{N}$ und $m < n$ zwei folgsame Zahlen.

Dann soll gelten: $ab = m(m+1)n(n+1) = x(x+1)$ mit $x \in \mathbb{N}$

Zu zeigen ist nun, dass es zu jedem m ein geeignetes n und x gibt, das diese Bedingung erfüllt.

Der Term $m(m+1)n(n+1)$ beschreibt eine folgsame Zahl, wenn gilt:

$$(1) \ x = m(n+1) \text{ und } (2) \ x + 1 = n(m+1) .$$

(1) in (2) eingesetzt, ergibt $m(n+1) + 1 = n(m+1)$ bzw. $mn + m + 1 = nm + n$ bzw. $n = m + 1$.

Für $n = m + 1$ sind beide Bedingungen erfüllt und es gilt für $a = m(m+1)$ und $b = (m+1)(m+2)$

$$x(x+1) = m(m+2)(m+1)^2 = (m^2 + 2m)(m^2 + 2m + 1).$$

Also kann man zu jeder folgsamen Zahl $a = m(m+1)$ mit $m \in \mathbb{N}$ eine zweite folgsame Zahl $b = (m+1)(m+2)$ angeben, so dass ihr Produkt $a \cdot b$ wieder eine folgsame Zahl ist.

Bemerkung: Das Produkt einer folgsamen Zahl mit der nächstgrößeren folgsamen Zahl ist also wieder eine folgsame Zahl. Daraus folgt aber auch, dass das Produkt einer folgsamen Zahl mit der vorhergehenden folgsamen Zahl auch wieder eine folgsame Zahl ist.

Bsp.: Für $3 \cdot 4 = 12$ und $4 \cdot 5 = 20$ ist das Produkt $3 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 5 = 15 \cdot 16$ wieder folgsam. Ebenso ist aber auch für $2 \cdot 3 = 6$ und $3 \cdot 4 = 12$ das Produkt $2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 4 = 8 \cdot 9$ wieder folgsam.