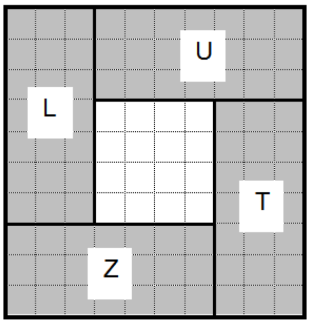
FÜMO 26 1. Runde Lösungen 6. Klasse

Aufgabe 1 LUTZ-Quadrate



a) Seien a und b die Seiten aller vier Rechtecke mit a > b, dann sind im inneren Viereck alle Winkel rechte Winkel und alle Seiten gleich s=a – b.
b) Es gibt vier LUTZ-Quadrate der Seitenlänge 10: a=9, b=1; a=8, b=2; a=7, b=3 und a=6, b=4. Es gibt dabei vier verschieden große innere Quadrate.
c) Es gibt 1008 LUTZ-Quadrate:
a=2016, b=1; a=2015, b=2, …, a= 1009, b=1008
d) Wenn das Gesamtquadrat 36-mal so groß wie das innere (=A) ist, so bleibt für den Ring der vier Rechtecke L, U, T und Z die Fläche 35A. Da die Rechtecke die gleiche Größe F haben, muss 35A durch 4 teilbar sein, also A ein Vielfaches von 4 Kästchen sein. Wählt man A gleich 4 Kästchen, so gilt 4F = 35·4 Kästchen, also F = 35 Kästchen. Wählt man wegen 35 = a·b die Seite a = 7 und b = 5, so gilt s = a-b = 2, Gesamtseitenlänge a+b = 12 und für die Quadratflächeninhalte $12^2 = 144 = 36\ s^2 = 36 \cdot A$.
Übrigens: Multipliziert man a und b mit derselben natürlichen Zahl, so erhält man weitere Lösungen.

Aufgabe 2 Dreistellige Zebrazahlen

a) Dreistellige Zebra-Zahlen haben die Form aba mit $a,b \in N$; $0 < a < 10$; $0 \leq b < 10$; $a \neq b$.
Damit gibt es für a und b jeweils 9 Möglichkeiten.
Also beträgt die Anzahl der dreistelligen Zebra-Zahlen 9 • 9 = 81.
b) Es ist die Summe S = 101 + 121 + 131 + . . . + 202 + 212 + . . . + 969 + 979 + 989 zu ermitteln.
Um diese Summe der 81 Zahlen zu ermitteln, machen wir es wie der kleine Carl Friedrich Gauss.
Dazu sortieren wir die Summanden um:
Es sei S′ = (101 + 989) + (121 + 979) + (131 + 969) + . . . + (535 + 565) + (545 + 545).
Das sind 41 Paare von denen 5 die Summe 1090 haben, nämlich (101+ 989), (212+ 878), (323 + 767), (434 + 656), (545 + 545).
Die restlichen 41 − 5 = 36 Paare haben jeweils die Summe 1100. (z.B. 121 + 979).
Also gilt für die gesuchte Summe S = 5 • 1090 + 36 • 1100 − 545 = 5450 + 39600− 545 = 44505.
(Die 545 wurde doppelt gezählt und muss also einmal abgezogen werden.)

Eine andere Lösung könnte so aussehen:
Idee: Jede Einer(=Hunderter)-ziffer E kann mit 9 verschiedenen Zehnerziffern Z (Z≠E !) kombiniert werden und jedes Z mit 8 Einerziffern (E≠Z und E≠0). Damit gilt:
Summe der Einer: 1·9 + 2·9 + …+ 9·9 = (1 + 2+ …+9) ·9 = 45·9 = 405;
Summe der Hunderter: (1·9 + 2·9 + …+ 9·9) ·100 = 405·100 = 40 500;
Summe der Zehner: (0·8 + 1·8 + 2·8 + …+ 9·8) · 10 = 45·8·10 = 3600.
Gesamtsumme: 405 + 3600 + 40 500 = 44 505

Aufgabe 3 Ali, Oli und Uli

Ali und Oli sind jetzt zusammen 13 Jahre alt. (1)

In einem Jahr werden Ali und Uli zusammen 20 Jahre alt sein, also sind Ali und Uli jetzt zusammen 18 Jahre alt. (2)

Oli und Uli werden in zwei Jahren zusammen 29 Jahre alt sein, also sind Oli und Uli jetzt zusammen 25 Jahre alt. (3)

In der Summe 13 + 18 + 25 = 56 kommt das derzeitige Alter eines jeden der drei genau zweimal vor. Also müssen Ali, Oli und Uli jetzt zusammen 56:2 = 28 Jahre alt sein.

Leicht findet man

mit Hilfe von (3): Ali ist jetzt 28 - 25 = 3 Jahre, also in drei Jahren 6 Jahre alt,

mit Hilfe von (2): Oli ist jetzt 28 - 18 = 10 Jahre, also in drei Jahren 13 Jahre alt und

mit Hilfe von (1): Uli ist jetzt 28 - 13 = 15 Jahre, also in drei Jahren 18 Jahre alt.