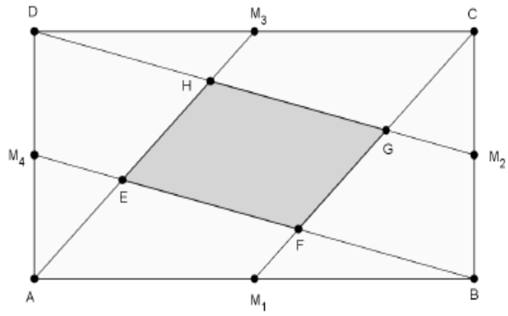
FÜMO 25 1. Runde Lösungen 8. Klasse

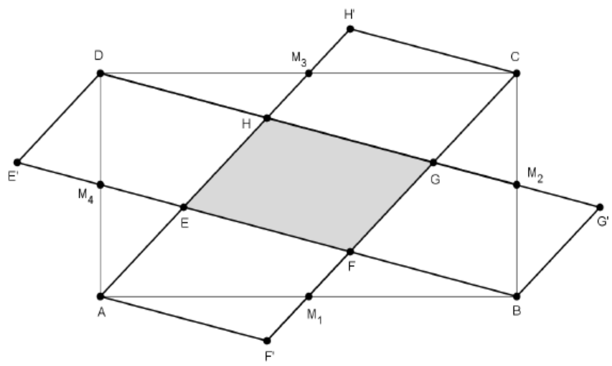
Aufgabe 1 Viereck im Rechteck



Es sei M_1 im Rechteck ABCD der Mittelpunkt der Strecke AB, M_2 der Mittelpunkt der Strecke BC, M_3 der Mittelpunkt der Strecke CD, sowie M_4 der Mittelpunkt der Strecke DA. Weiterhin sei EFGH das zu betrachtende (grau hinterlegte) Viereck, das wie in der Aufgabenstellung gefordert, konstruiert wurde (siehe rechte Abbildung).

a) Da $AM_1 = M_3C$ und $AM_1 \parallel M_3C$, ist AM_1CM_3 ein Parallelogramm und deshalb $AM_3 \parallel M_1C$ bzw. $EH \parallel FG$.
Da $DM_4 = M_2B$ und $DM_4 \parallel M_2B$ ist M_4BM_2D ein Parallelogramm und deshalb $DM_2 \parallel M_4B$ bzw. $EF \parallel HG$. Somit ist EFGH ein Parallelogramm.

b) In der oberen Abbildung zeichnet man die Parallele durch C zu HG. Diese schneidet die Gerade durch die Punkte E und H im Punkt H‘. Weiterhin zeichnet man die Parallele durch A zu EF. Diese schneidet die Gerade durch die Punkte G und F im Punkt F‘. Analog erhält man die Punkte E‘ und G‘. (siehe Abbildung unten)



Es gilt $AM_1 = M_1B$, $\angle AM_1F' = \angle BM_1F$ (Scheitelwinkel) und $\angle F'AM_1 = \angle FBM_1$ (Wechselwinkel an geschnittenen Parallelen). Somit gilt $AF'M_1 \cong M_1BF$ nach Kongruenzsatz WSW.
Es gilt $BM_2 = M_2C$, $\angle BM_2G' = \angle CM_2G$ (Scheitelwinkel) und $\angle G'BM_2 = \angle GCM_2$ (Wechselwinkel an geschnittenen Parallelen). Somit ist $BG'M_2 \cong M_2CG$ nach Kongruenzsatz WSW.

Analog gilt $CH'M_3 \cong M_3DH$ und $DE'M_4 \cong M_4AE$.

Wegen $AF'M_1 \cong M_1BF$, $BG'M2 \cong M_2GC$, $CH'M_3 \cong M_3DH$ und $DE'M_4 \cong M_4AE$ hat das Zwölfeck AF'FBG'GCH'HDE'E den gleichen Flächeninhalt wie das Rechteck ABCD.

Dieses Zwölfeck ist aus fünf Parallelogrammen zusammengesetzt. Dies folgt unmittelbar aus a) und daraus wie die Punkte E‘, F‘, G‘ und H‘ konstruiert wurden. (vgl. Abbildung oben)

Im Dreieck AHD gilt $DM_4 = M_4A$ und $DH \parallel M_4E$. Daraus folgt AE = EH.
Da $AF' \parallel EF$ und $AE \parallel F'F$ folgt AE = FF‘ und AF‘ = EF.
Wegen $EF \parallel HG$ und $EH \parallel FG$ gilt EF = HG und EH = FG.
Daraus (und wegen der Lagebeziehung) folgt, dass die Parallelogramme **AF'FE und EFGH** kongruent sind.
Analog zeigt man die Kongruenz der Parallelogramme **EFGH und HGCH‘.**
Dazu verwendet man die selbe Argumentation wie oben im Dreieck FBC, und zeigt, dass FG = GC. (*)

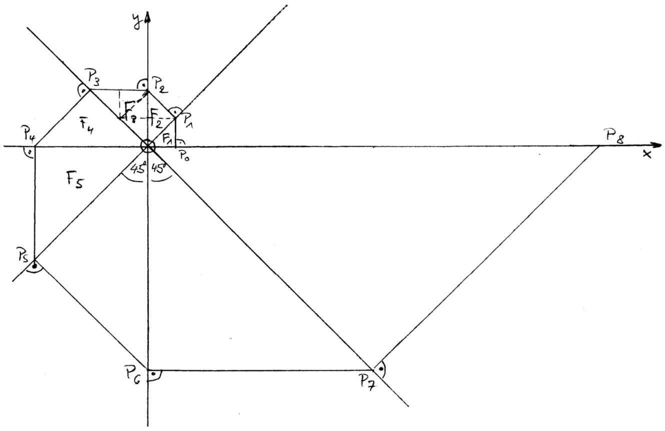
Im Dreieck ABE gilt $AM_1 = M_1B$ und $AE \parallel M_1F$ und damit EF = FB
Im Dreieck DGC gilt $DM_3 = M_3C$ und $HM_3 \parallel GC$ und damit DH = HG
Analog wie im obigen Absatz (*) zeigt man die Kongruenz der Parallelogramme **E'EHD, EFGH** und **FBG'G**.

Das Zwölfeck ist also aus fünf kongruenten Parallelogrammen zusammengesetzt.
Damit beträgt der Anteil des Vierecks EFGH ein Fünftel der Rechteckfläche also 20%.

Aufgabe 2 Einer weg und doppelt dazu

Wenn zwei aufeinander folgende Zahlen der Folge gleich sind, gilt:10x +e = x+2e <=> 9x = 1e.
Da e eine Ziffer ist, muss e = 9 und x=1 sein, d.h. erreicht man die Zahl 19, bleibt die Zahlenfolge stecken. Ist die Startzahl ein Vielfaches von 19, sind alle Folgezahlen durch 19 teilbar.
Ist n = 19k dann ist (19k-e):10 + 2e = (19k+19e) : 10 eine natürliche Zahl, die durch 19 teilbar ist.
z.B. 47728 = 2512 · 19 Die Folgezahl ist 4772 + 16 = 4788 = 252 · 19
Durch das Streichen der Einerziffer und Addieren von maximal 18 werden alle Zahlen, die größer als 19 sind, kleiner, d.h. alle Zahlen, die durch 19 teilbar sind, enden bei 19 und alle Zahlen, die nicht durch 19 teilbar sind, geraten, wenn sie kleiner als 19 werden, in eine Dauerschleife aus 18 Zahlen:
2-4-16-13-7-14-18-17-15-11-3-6-12-5-10-1.

Aufgabe 3 Riesenweg



Benachbarte Flächen unterscheiden sich um den Faktor 2. (Siehe Zeichnung!).

$F_1 = \frac{1}{2},\ F_2 = 1,\ F_3 = 2,\ \cdots,\ F_8 = 64,\ \cdots,\ F_n = 2^{n-2}$

$A_1 = \frac{1}{2} + 1 + 2 + 4 + 8 + 16 + 32 + 64 = 127{,}5$

Bei 25 vollständigen Umläufen hat der Endpunkt des Weges die Nummer n=25·8=200.

$A_2 = 2^{198} + 2^{197} + \cdots + 2^{191} = 2^{191}\left(2^7 + 2^6 + \ldots + 2 + 1\right) =$
$= 2^{191} \cdot 255$

Die ungeraden Wegabschnitte verdoppeln sich von einer ungeraden Nummer zur nächstgrößeren ungeraden Nummer um den Faktor 2.

$d_1 = 1;\ d_3 = 2^1;\ d_5 = 2^2 = 4;\ \ldots;\ d_{201} = 2^{100}$ da 201 die 101. ungerade Zahl ist.

$\overline{OP_n} = d_{n+1} = 2^{100} = 1024^{10}$