FÜMO 24 2. Runde Lösungen 8. Klasse

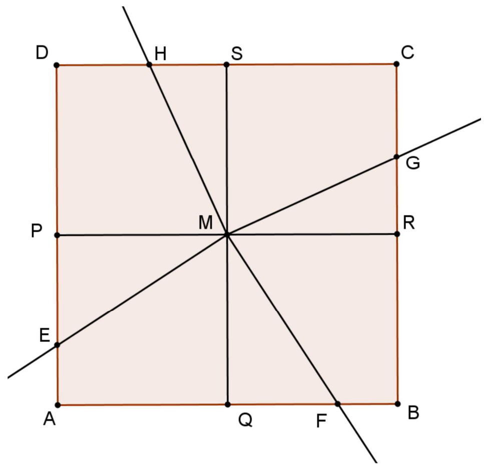
Aufgabe 1 … durch 13 teilbar

Sei $n = 100u + v$.

a) Nach Voraussetzung ist $9u + v$ durch 13 teilbar. Da $100u + v = (9u + v) + 91u$ und $91u$ durch 13 teilbar ist, ist auch $100u + v$ durch 13 teilbar.

b) Nach Voraussetzung ist $n = 100u + v = 13k$ mit $k \in \mathbb{N}$.
Wegen $4u - v = 104u - (100u + v) = 13 \cdot 8u - 13k = 13(8u - k)$ ist $4u - v$ ein Vielfaches von 13.

Aufgabe 2 Verdeckte Notiz



Zeichne die Symmetrieachsen durch die Mitten der Quadratseiten ein. Dann gilt:
$\angle SMH + \angle GMS = 90°$ und $\angle RMG + \angle GMS = 90°$
Also ist $\angle SMH = \angle RMG$.
Da außerdem $\overline{MS} = \overline{MR}$ und $\angle HSM = \angle GRM = 90°$,
sind die Dreiecke MSH und MRG kongruent (wsw).
Analog zeigt man, dass auch die Dreiecke EMP und MQF kongruent sind. Daraus folgt:
Die graue Fläche ist halb so groß wie die Fläche des Quadrats, ihr Anteil beträgt also 50%.

Aufgabe 3 Quadratzahl XXL

Da 2016 auf 6 endet, kann die zu quadrierende Zahl als Einerziffer nur 4 oder 6 haben.
Damit muss gelten:

(1) $(10x + 4)^2 = 10000a + 2016$ mit $a,x \in \mathbb{N}$ oder

(2) $(10x + 6)^2 = 10000a + 2016$ mit $a,x \in \mathbb{N}$.

Aus (1) folgt: $100x^2 + 80x + 16 = 10000a + 2016$; $20x(5x+4) = 2000(5a+1)$; $x(5x+4) = 100(5a+1)$;
Da x gerade sein muss und $5x+4$ nicht durch 5 teilbar ist, muss $x = 50k$ sein mit $k \in \mathbb{N}$.

Es folgt $50k(250k+4) = 100(5a+1)$ bzw. $100k(125k+2) = 100(5a+1)$ bzw. $k(125k+2) = 5a+1$,
also $5a = 125k^2 + 2k - 1$. Das kleinste k, das diese Bedingung erfüllt, ist $k=3$, woraus sich für a ergibt:
$5a = 1125 + 6 - 1 = 1130$, d.h. $a = 226$. Man erhält die Quadratzahl 2262016 von 1504.

Aus (2) folgt: $100x^2 + 120x + 36 = 10000a + 2016$; $20[x(5x+6)+1] = 2000(5a+1)$;
$x(5x+6)+1 = 100(5a+1)$; $5x^2 + 6x + 1 = 100(5a+1)$; $(5x+1)(x+1) = 100(5a+1)$;
Da x ungerade sein muss und $5x+1$ nicht durch 5 teilbar ist, muss $x+1 = 50k$ sein mit $k \in \mathbb{N}$.

Es folgt $50k[5(50k-1) + 1] = 100(5a+1)$ bzw. $k(250k - 4) = 2(5a+1)$ bzw. $2k(125k-2) = 2(5a+1)$ bzw.
$125k^2 - 2k = 5a + 1$ bzw. $125k^2 - 2k - 1 = 5a$.
Das kleinste k, das diese Bedingung erfüllt, ist $k=2$, woraus sich für a ergibt:
$5a = 500 - 4 - 1 = 495$, d.h. $a = 99$. Man erhält die Quadratzahl 992016 von 996.

Damit ist 992016 die kleinste Quadratzahl, die auf 2016 endet.
Als Quersumme von 996 erhält man 24.