FÜMO 24 2. Runde Lösungen 7. Klasse

Aufgabe 1 Gespiegelte Zahlen

Es sei $\overline{abcde}$ die Zifferndarstellung von n. Dann ist s = $\overline{edcba}$ die Zifferndarstellung der Spiegelzahl von n. Es soll gelten $9\cdot\overline{abcde} = \overline{edcba}$.

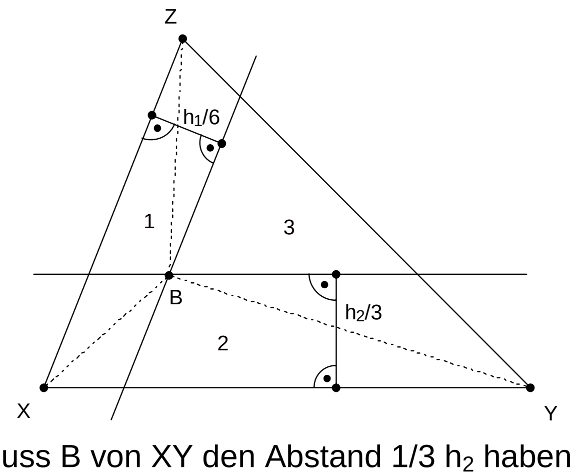
1) Da s das Produkt einer fünfstelligen Zahl mit 9 und fünfstellig ist, kann n maximal 11111 (*) sein. Also gilt a = 1
2) Die Spiegelzahl endet also auf 1 und demzufolge muss gelten e = 9, da nur 9·9 = 81 die Endziffer 1 liefert. Also gilt $9\cdot n = 9\cdot\overline{1bcd9} = \overline{9dcb1}$ (**).
3) b kann nur 0 oder 1 sein.
   Sei b = 1. Dann hätte man $9\cdot\overline{11cd9} = \overline{9dc11}$. Wegen (*) muss c = 0 oder c = 1 sein.
   Ist c = 1 muss d = 0 sein, was aber wegen 9·11109 = 99981 ≠ 901119 nicht möglich ist.
   Ist c = 0, müsste gelten: $9\cdot\overline{110d9} = \overline{9d011}$, was wegen 9(10d+9) ≠ 11 für kein d möglich ist.
   Also ist b = 0. Damit hat man $9\cdot\overline{10cd9} = \overline{9dc01}$. Also muss 9·(10d + 9) = 90d + 81 auf „01" enden, was nur für d = 8 zutrifft.
4) Es verbleibt nur noch $9\cdot\overline{10c89} = \overline{98c01}$.
   Mit 9·(10089 + 100c) = 98001 +100c bzw. 800c = 98001 - 9·10089 bzw. 800d = 7200 folgt c = 9.

Also gilt n = 10989. Probe: 9·10989 = 98901 und 98901 ist tatsächlich Spiegelzahl zu 10989.
Damit lautet Koljas Zahl 10989.

Aufgabe 2 Locker am Barhocker

Wenn der Besucher mit x Euro und y Cent (x, y positive ganze Zahlen) die Bar betritt, beträgt der Geldbetrag x+ y/100 Euro. Eine Viertelstunde später ist der Anfangsbetrag auf ein Viertel geschrumpft, also auf den Wert x/4 + y/400 Euro = y/2 Euro + x Cent = y/2 + x/100 Euro.
Durch Umformen erhalten wir 100x + y = 200y + 4x oder 96x = 199y.
Aus der letzten Gleichung folgt: Die Primzahl 199 ist ein Teiler von x, d.h. x = n·199, n = 1, 2, 3, … .
Für n ≥ 2 ergibt sich somit: 96·n·199 = 199·y, mit y = n·96.
Dies hätte aber n > 100 zur Folge, was der Voraussetzung n > 100 widerspricht. Somit muss n = 1 und x = 199, y = 96 erfüllt sein.
Der Besucher hatte zu Beginn den Betrag 199,96 € einstecken und nach einer Viertelstunde dreiviertel davon, also 149,97 €, ausgegeben.

Aufgabe 3 Der gemeinsame Brunnen



Die Flächeninhalte A_1, A_2 und A_3 der Dreiecke XBZ, XBY und YBZ verhalten sich wie 1:2:3.
Ist A der Flächeninhalt des Dreiecks XYZ, so gilt: $A_1 = 1/6\ A$, $A_2 = 1/3\ A$ und $A_3 = ½\ A$.
Sei h_1 die Länge des Lotes von Y auf XZ.
Dann ist $A = ½\ h_1\cdot XZ$.
Wegen $A_1 = 1/6\ A = 1/6\cdot ½\ h_1\cdot XZ = ½\cdot (1/6 h_1)\cdot XY$ muss B von XY den Abstand $1/6\ h_1$ haben.
Sei h_2 die Länge des Lotes von Z auf XY.
Dann ist $A = ½\ h_2\cdot XY$.
Wegen $A_2 = 1/3\ A = 1/3\cdot ½\ h_2\cdot XY = ½\cdot (1/3h_2)\cdot XY$ muss B von XY den Abstand $1/3\ h_2$ haben.
Deshalb ist B der Schnittpunkt der Parallelen zu XZ im Abstand $1/6h_1$ und der Parallelen zu XY im Abstand $1/3h_2$.

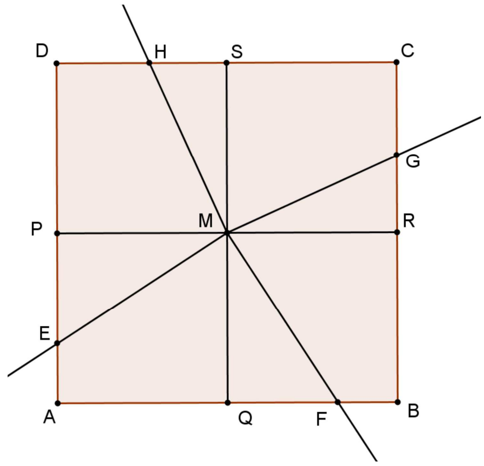
FÜMO 24 1. Runde Lösungen 8. Klasse

Aufgabe 1 … durch 13 teilbar

Sei n = 100u + v.

a) Nach Voraussetzung ist 9u + v durch 13 teilbar. Da 100u + v = (9u + v) + 91u und 91u durch 13 teilbar ist, ist auch 100u + v durch 13 teilbar.
b) Nach Voraussetzung ist n = 100u + v = 13k mit k ϵ N.
Wegen 4u - v = 104u - (100u + v) = 13·8u – 13k = 13(8u – k) ist 4u – v ein Vielfaches von 13.

Aufgabe 2 Verdeckte Notiz



Zeichne die Symmetrieachsen durch die Mitten der Quadratseiten ein. Dann gilt:
<SMH + < GMS = 90° und <RMG + <GMS = 90°
Also ist <SMH = <RMG.
Da außerdem $\overline{MS} = \overline{MR}$ und <HSM = <GRM = 90°,
sind die Dreiecke MSH und MRG kongruent (wsw).
Analog zeigt man, dass auch die Dreiecke EMP und MQF kongruent sind. Daraus folgt:
Die graue Fläche ist halb so groß wie die Fläche des Quadrats, ihr Anteil beträgt also 50%.

Aufgabe 3 Quadratzahl XXL

Da 2016 auf 6 endet, kann die zu quadrierende Zahl als Einerziffer nur 4 oder 6 haben.
Damit muss gelten:

(1) $(10x + 4)^2 = 10000a + 2016$ mit $a,x \in N$ oder

(2) $(10x + 6)^2 = 10000a + 2016$ mit $a,x \in N$.

Aus (1) folgt: $100x^2 + 80x + 16 = 10000a + 2016$; $20x(5x+4) = 2000(5a+1)$; $x(5x+4) = 100(5a+1)$;
Da x gerade sein muss und 5x+4 nicht durch 5 teilbar ist, muss x = 50k sein mit $k \in N$.

Es folgt $50k(250k+4) = 100(5a+1)$ bzw. $100k(125k+2) = 100(5a+1)$ bzw. $k(125k+2) = 5a+1$,
also $5a = 125k^2 + 2k - 1$. Das kleinste k, das diese Bedingung erfüllt, ist k=3, woraus sich für a ergibt:
5a = 1125 + 6 – 1 = 1130, d.h. a = 226. Man erhält die Quadratzahl 2262016 von 1504.

Aus (2) folgt: $100x^2 + 120x + 36 = 10000a + 2016$; $20[x(5x+6)+1] = 2000(5a+1)$;
$x(5x+6)+1 = 100(5a+1)$; $5x^2 + 6x + 1 = 100(5a+1)$; $(5x+1)(x+1) = 100(5a+1)$;
Da x ungerade sein muss und 5x+1 nicht durch 5 teilbar ist, muss x+1 = 50k sein mit $k \in N$.

Es folgt $50k[5(50k-1) + 1] = 100(5a+1)$ bzw. $k(250k - 4) = 2(5a+1)$ bzw. $2k(125k-2) = 2(5a+1)$ bzw.
$125k^2 - 2k = 5a + 1$ bzw. $125k^2 - 2k - 1 = 5a$.
Das kleinste k, das diese Bedingung erfüllt, ist k=2, woraus sich für a ergibt:
5a = 500 - 4 – 1 = 495, d.h. a = 99. Man erhält die Quadratzahl 992016 von 996.

Damit ist 992016 die kleinste Quadratzahl, die auf 2016 endet.
Als Quersumme von 996 erhält man 24.