FÜMO 23 1. Runde Lösungen 8. Klasse

Aufgabe 1 Durchschnittlich 10

Die ersten zehn Primzahlen sind 2; 3; 5; 7; 11; 13; 17; 19; 23 und 29. Ihre Summe ist 129.
Sei v die Anzahl der Vieren und n die Anzahl der Neunen, die Viola an die Tafel geschrieben hat.
Für den Durchschnitt aller an der Tafel stehenden Zahlen soll gelten:

$$(129 + 4v + 9n):(10 + v + n) = 10$$

d.h. es muss gelten $129 + 4v + 9n = 100 + 10v + 10n$ bzw. $29 = 6v + n$ (1).

Da v und n keine negativen Zahlen sein können, ist die maximale Anzahl von Vieren 4. (Für $v \geq 5$ wäre $6v+n > 29$). Die minimale Anzahl von Vieren ist 1.

Setzt man nun für v die möglichen Zahlen 1;2; 3; 4 in (1) ein, so erhält man folgende mögliche Paare (v; n), die die Gleichung (1) erfüllen: (1; 23); (2; 17); (3; 11); (4; 5).
Die kleinste Summe in den Paaren ergibt sich zu 4 + 5 = 9.

Also stehen jetzt mindestens 10 + 9 = 19 Zahlen an der Tafel.
Probe: $(129 + 4\cdot 4 + 5\cdot 9):(10 + 4 + 5) = (129 + 16 + 45):19 = 190:19 = 10$.

Aufgabe 2 Querquadrat

Für die Quadratzahl von $z = 10^m - 2014$ gilt für m>6:

$$\begin{aligned}
z^2 &= (10^m - 2014)^2 = (10^m)^2 - 2 \cdot 2014 \cdot 10^m + 2014^2 \\
&= 10^{2m} - 4028 \cdot 10^m + 4056196 \\
&= 10^m (10^m - 4028) + 4056196 \\
&= 10^m (10^m - 10^4 + 10^4 - 4028) + 4056196 \\
&= 10^m [10^4 (10^{m-4} - 1) + (10000 - 4028)] + 4056196 \\
&= 10^m [999\ldots9990000 + 5972] + 4056196 \quad \text{(mit (m-4)-mal die 9)} \\
&= 10^m\ 999\ldots9995972 + 4056196 \\
&= 999\ldots9995972000\ldots0004056196 \quad \text{(mit (m-7)-mal die 0)}
\end{aligned}$$

Als Quersumme erhält man für m>6:

$(m-4)\cdot 9 + 5 + 9 + 7 + 2 + 4 + 5 +6 + 1 + 9 + 6 = 9m - 36 + 54 = 9m + 18$.

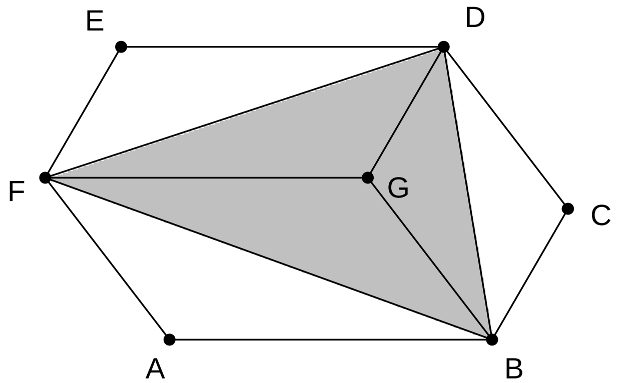
Für m=6 ist $z^2 = 10^6 [1000000 - 4028] + 4056196 = 995972000000 + 4056196 = 995976056196$,
also QS = 72.

Für m=5 ist $z^2 = 10^5 [100000 - 4028] + 4056196 = 9597200000 + 4056196 = 9601256196$,
also QS = 45.

Für m=4 ist $z^2 = 10^4 [10000 - 4028] + 4056196 = 59720000 + 4056196 = 63776196$, also QS = 45.

Aufgabe 3 Dreieck im Sechseck

Zuerst zeichnet man den Punkt G ein:
G sei der Schnittpunkt der Parallelen zu ED durch F und der Parallelen zu BC durch D.
Damit ist FGDE ein Parallelogramm und es ist
$\overline{FG} = \overline{ED}$, $\overline{FE} = \overline{GD}$, FG II ED und EF II DG.
Nach Voraussetzung ist
$\overline{FE} = \overline{BC}$ und EF II BC bzw.
$\overline{AB} = \overline{ED}$ und AB II ED, also gilt
$\overline{BC} = \overline{GD}$ und BC II GD bzw.
$\overline{AB} = \overline{FG}$ und AB II FG.



Deshalb sind ABGF und BCDG ebenfalls Parallelogramme, deren Diagonalen ihre Flächen halbieren.

Also beträgt der Anteil der grauen Dreiecksfläche an der Sechseckfläche ½.