Lösungen FÜMO 22 2. Runde Klassenstufe 8

Aufgabe 1 Quadratdifferenz

Es sei y die Seitenlänge des größeren und x die Seitenlänge des kleineren Quadrates.
Nun soll gelten: $y^2 - x^2 = 400$.
Mit Hilfe der 3. Binomischen Formel erhält man: $(y + x)(y - x) = 400$ mit $y > x > 0$
Nun bestimmt man mit Hilfe der Primfaktorzerlegung von $400 = 2^4 \cdot 5^2$ alle Zerlegungen von 400 in zwei ganzzahlige Faktoren und erhält:

(1) $1 \cdot 400$, (2) $2 \cdot 200$, (3) $4 \cdot 100$, (4) $5 \cdot 80$, (5) $8 \cdot 50$, (6) $10 \cdot 40$, (7) $16 \cdot 25$ und (8) $20 \cdot 20$.

Da die beiden Gleichungen $y + x = a$ und $y - x = b$ und mit $a,b \in N$ und $a > b$ die Lösungen $x = \frac{a-b}{2}$ und $y = \frac{a+b}{2}$ haben, müssen a und b beide gerade oder beide ungerade sein, damit x und y ganzzahlig sind. Damit entfallen die Zerlegungen (1), (4), (7) und wegen $x > 0$ auch (8).

Daraus ergeben sich genau vier Lösungen:

$y - x = 2$ und $y + x = 200$, es folgt $y = 101$, $x = 99$;
$y - x = 4$ und $y + x = 100$, es folgt $y = 52$, $x = 48$;
$y - x = 8$ und $y + x = 50$, es folgt $y = 29$, $x = 21$;
$y - x = 10$ und $y + x = 40$, es folgt $y = 25$, $x = 15$.

Aufgabe 2 Quadraterie

Sei m eine natürliche Zahl. Es wird vorausgesetzt, dass sich 2m als Summe zweier verschiedener Quadratzahlen schreiben lässt: $2m = x^2 + y^2$ mit $x, y \in N$ und $x > y > 0$.

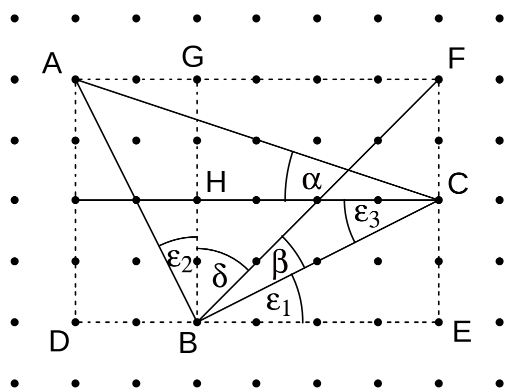
Da 2m gerade ist, müssen x^2 und y^2 und damit auch x und y beide gerade oder beide ungerade sein, d.h. $x + y = 2a$ und $x - y = 2b$ mit $a,b \in N$. Nun ist

$4m = 2(x^2 + y^2) = 2x^2 + 2y^2) + 2xy - 2xy = x^2 + 2xy + y^2 + x^2 - 2xy + y^2 = (x + y)^2 + (x - y)^2$,

also ist $m = \frac{(x+y)^2}{4} + \frac{(x-y)^2}{4} = \left(\frac{x+y}{2}\right)^2 + \left(\frac{x-y}{2}\right)^2 = a^2 + b^2$.

Damit ist gezeigt, dass sich m als Summe zweier Quadratzahlen schreiben lässt. Da $x + y > x - y$, sind diese auch verschieden.

Aufgabe 3 Winkel im Raster



[AB] und [BC] sind Diagonalen in den kongruenten Rechtecken ADBG und BECH.
Also ist $\overline{AB} = \overline{BC}$, d.h. ABC ist gleichschenklig mit den Basiswinkeln $\sphericalangle$ ACB= $\sphericalangle$ CAB. (1)

Da [FB] Diagonale des Quadrats BEFG ist, gilt:

$\delta = \beta + \varepsilon_1 = 45°$ (2)

Da die Dreiecke BGA, BEC und CHB offensichtlich kongruent sind, ist $\varepsilon_2 = \varepsilon_1 = \varepsilon_3$ (3)

Wegen (2) und (3) ist
$90° = 45° + \beta + \varepsilon_1 = 45° + \beta + \varepsilon_2 = \sphericalangle$ CBA

Wegen (1) folgt $\alpha + \varepsilon_3 = 45°$. Nach (2) ist $\beta + \varepsilon_1 = 45°$. Wegen (3) ist $\varepsilon_1 = \varepsilon_3$, also folgt $\alpha = \beta$.