Lösungen FÜMO 22 2. Runde Klassenstufe 7

Aufgabe 1 Mädchenpower

Zu Milas Klasse gehören M Mädchen und J Jungen. Seien m und j die von den Mädchen und Jungen erzielten Punkte. Dann gilt für den Durchschnitt d: $d = \frac{m+j}{M+J}$.

Hätte jedes Mädchen 3 Punkte mehr erzielt, dann würde der Durchschnitt um 1,2 Punkte steigen, also würde gelten: $d + 1{,}2 = \frac{m+j+3M}{M+J} = d + \frac{3M}{M+J}$, also $\frac{3M}{M+J} = 1{,}2$.

Daraus ergibt sich der Mädchenanteil $\frac{M}{M+J}$ in der Klasse zu $\frac{M}{M+J} = 1{,}2 : 3 = 0{,}4 = \frac{2}{5}$,

also ist $M + J = \frac{5}{2}M$. Da 20 < M + J < 30 ist nur M = 10 und somit nur M + J = 25 möglich.

Aufgabe 2 Zahlentausch

Es seien a und b mit a ≤ b die beiden Zahlen, die an der Tafel stehen.
Nun hat a die Zifferndarstellung <u>uvw</u> und b entsprechend <u>xyz</u>.

Somit gilt <u>uvwxyz</u> = 1000a + b und <u>xyzuvw</u> = 1000b + a.

Weiter gilt: 7(1000a + b) = 6(1000b + a), also ist 6994a = 5993b.

Die Primfaktorzerlegung von 6994 bzw. 5993 lautet:

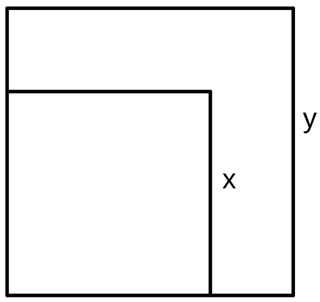
6994 = 2·**13**·269 bzw. 5993 = **13**·461

Somit ist ggT(6994,5993) = 13 was zu **538a = 461b** führt.

Da 538 und 461 teilerfremd sind, muss a = 461k und b = 538k sein mit $k \in \mathbb{N}$. Da a und b dreistellig sind und 538·2 > 999, gibt es nur die Lösung a =538 und b = 461.
Es stehen die Zahlen 461 und 538 an der Tafel.

Probe: 7·461538 = 3230766 = 6·538461, d.h. beide Produkte sind gleich.

Aufgabe 3 Quadratschnitte



Es sei y die Länge der quadratischen Platte und x die Länge des größeren Quadrates, das beim (vollständigen) Zerlegen neben den 255 Quadraten mit der Seitenlänge 1 entstehen soll.

Die Seitenlängen x und y müssen jeweils ganzzahlig sein, da sonst die geforderte vollständige Zerlegung in 255 Quadrate mit Flächeninhalt 1 und ein größeres Quadrat nicht möglich ist.
Außerdem gilt: x > 1, y > 1 und y > x .

Nun soll gelten: $y^2 = 255 + x^2$ bzw. $y^2 - x^2 = 255$.
Mit Hilfe der 3. Binomischen Formel erhält man: $(y+x)(y-x) = 255$ mit y > x (#)

Nun bestimmt man mit Hilfe der Primfaktorzerlegung von 255 = 3·5·17 alle Zerlegungen von 255 in zwei ganzzahlige Faktoren und erhält: 1·255, 3·85, 5·51 und 15·17.
In der Zerlegung (#) ist (y-x) < (y+x). Also sind vier Fälle zu betrachten:

y – x = 1 und y + x = 255, es folgt y = 128, x = 127;
y – x = 3 und y + x = 85, es folgt y = 44, x = 41;
y – x = 5 und y + x = 51, es folgt y = 28, x = 23;
y – x = 15 und y + x = 17, es folgt y = 16, x = 1.

Da x > 1 sein soll, kommen als Werte für die Seitenlänge der Platte nur 128, 44 und 28 in Betracht.

Probe: $128^2 = 16384 = 255{+}16129 = 255{+}127^2$; $44^2 = 1936 = 255{+}1681 = 255{+}41^2$;
$28^2 = 784 = 255{+}529 = 255{+}23^2$.