Lösungen FÜMO 22 2. Runde Klassenstufe 5

Aufgabe 1 Glücksketten

Die Anzahl der kurzen Ketten sei K, die Anzahl der langen L. Da jede kurze Kette vier Steine enthält, jede lange aber sieben, benötigt Julia insgesamt $99 = 4 \cdot K + 7 \cdot L$ Steine.
Wegen 99:7 = 14,1..., kann Julia höchstens 14 lange Ketten herstellen. Daher können wir alle möglichen Werte L in $0 < L \leq 14$ durch Probieren finden.
Wir können aber die Zahl der Möglichkeiten noch (weiter) einschränken. In der (diophantischen) Gleichung $4 \cdot K + 7 \cdot L = 99$ ist der Summand 4K stets gerade; daher muss L ungerade sein, damit auch die Summe ungerade wird. Diese Beobachtung reduziert die möglichen Werte für L. Wir müssen somit nur die Werte L = 1, 3, 5, 7, 9, 11 und 13 untersuchen.
Dazu verwenden wir eine Tabelle:

Anzahl L	Anzahl Steine $7 \cdot L$	Reststeine $99-7 \cdot L$	Anzahl kurzer Ketten $(99-7 \cdot L):4$	möglich?
1	7	92	23	ja
(3)	21	78	(19,5)	nein
5	35	64	16	ja
(7)	49	50	(12,5)	nein
9	63	36	9	ja
(11)	77	22	(5,5)	nein
13	91	8	2	ja

Aufgabe 2 Addieren und Dividieren

a) Anja würde folgendermaßen weiterrechnen:
30 + 5 = 35, 35 : 5 = 7, 35 + 7 = 42, 42 : 7 = 6, 42 + 6 = 48, 48 : 6 = 8, 48 + 8 = 56, 56 : 8 = 7, 56 + 7 = 63, 63 : 7 = 9.
Die Reihe würde also mit 35, 7, 42, 6, 48, 8, 56, 7, 63 und 9 fortgesetzt.

b) An der Zahlenfolge 12, **3**, 15, 5, 20, **4**, 24, 6, 30, **5**, 35, 7, 42, **6**, 48, 8, 56, **7**, 63, 9 … erkennt man:

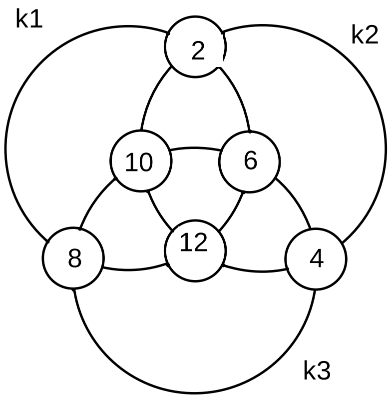
(1) Die 2. Zahl ist 3, die 6. Zahl ist 4, die 10 Zahl ist 5, jede weitere 4. Zahl erhöht sich um 1. Geht man von der 2. Zahl 3 2012 Zahlen weiter, also zur 2014. Zahl, so erhöht sich die Ausgangszahl 3 um 2012:4 = 503. Die 2014. Zahl lautet also 506.

(2) Die 4. Zahl ist 5, die 8. Zahl ist 6, auch hier erhöht sich jede weitere 4. Zahl um 1. Geht man von der 4. Zahl 5 2008 Zahlen weiter, also zur 2012. Zahl, so erhöht sich die Ausgangszahl 5 um 2008:4 = 502. Damit lautet die 2012. Zahl 507.

(3) Die 3. Zahl ist das Produkt aus vorhergehender und nachfolgender Zahl. Dies gilt auch für die 5., 7., 9., … 2013. Zahl. Also ist die 2013. Zahl $507 \cdot 506 = 256542$.

Aufgabe 3 Kreisverkehr

a) Man verteilt die Zahlen 2, 4, 6, 8, 10, 12 so, dass in den Schnittpunkten zweier Kreise zwei Zahlen mit der Summe 14 stehen:
2 und 12, 4 und 10 und 6 und 8.



b) Die Zahlen 1, 4, 6, 9, 10 und 12 enthalten genau zwei ungerade Zahlen 1 und 9. Dann müssen 1 und 9 auf einem der drei Kreise, z. B. k1, liegen.

(1) Liegen 1 und 9 auch auf k2 (bzw. k3), so wäre die Summe auf dem Kreis k3 (bzw. k2) aber $4 + 6 + 10 + 12 = 32 \neq 28$.

(2) Liegt 1 auf k2 und 9 auf k3, so wären die Summen auf k1 und auf k2 ungerade, also $\neq 28$.

Damit kann es für diese Zahlen keine Lösung geben.