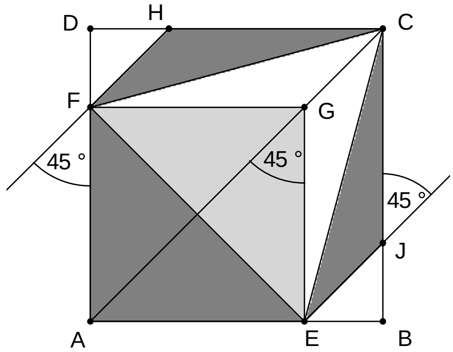
FÜMO 22 1. Runde Lösungen 8. Klasse

Aufgabe 1 Dreieck im Quadrat

Das Dreieck AEF wird zum Quadrat AEGF ergänzt.

Aus Symmetriegründen muss G auf der Diagonalen [AC] liegen.
Wegen der 45°-Winkel sind FH, GC und EJ parallel.
FG II HC, also ist FGCH ein Parallelogramm.
EG II JC, also ist EJCG ein Parallelogramm.
Da die Diagonalen [FC] und [CE] die Flächen der beiden Parallelogramme halbieren, gilt:
Flächeninhalt A(FHC) = A(FGC) und A(EJC = A(EGC).

Da außerdem A(AEF) = A(EGF), ist der Flächemimhalt der drei dunkelgrauen Dreiecke zusammen so groß wie der des gleichseitigen Dreiecks FEC.

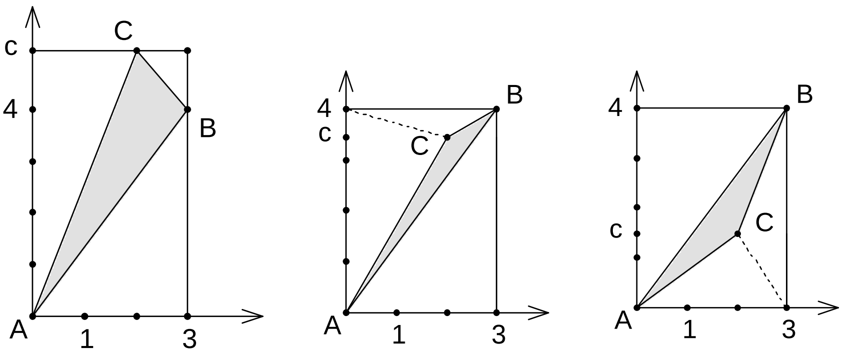


Aufgabe 2 Wandernde Ecke

Die Gerade durch die Punkte A und B hat die Gleichung $y = \frac{4}{3}x$.

Damit C auf ihr liegt, muss $c = \frac{8}{3}$ gelten.

Wir müssen drei Fälle in Abhängigkeit der Lage von C betrachten (vgl. Abb.):



1. Fall: C liegt oberhalb oder in gleicher Höhe zu B, d.h. c ≥ 4.

Für c ≥ 4 erhält man den Flächeninhalt A von ΔABC durch Subtraktion entsprechender Dreiecksflächen von der Rechtecksfläche (s. linke Figur).

Es ist $A = 5 = 3c - \frac{3\cdot 4}{2} - \frac{2\cdot c}{2} - \frac{1\cdot(c-4)}{2} = \frac{3}{2}\cdot c - 4$, daraus folgt c = 6

2. Fall: C liegt unterhalb von B und oberhalb der Geraden AB, d.h. $\frac{8}{3} \le c < 4$ (siehe 2. Figur).

Es ist $A = 5 = 3\cdot 4 - \frac{3\cdot 4}{2} - \frac{3\cdot(4-c)}{2} - \frac{4\cdot 2}{2} = \frac{3}{2}\cdot c - 4$

Man erhält c = 6. Das ist aber ein Widerspruch zur Bedingung *c* < 4.

3. Fall: C liegt zwischen x-Achse und der Geraden AB, d.h. $0 \le c < \frac{8}{3}$ (siehe 3. Figur).

Es ist $A = 5 = 3\cdot 4 - \frac{3\cdot c}{2} - \frac{4\cdot 1}{2} - \frac{3\cdot 4}{2} = 4 - \frac{3}{2}\cdot c$ und erhalten

daraus $c = -\frac{2}{3} < 0$. Dieser Fall kann wegen c ≥ 0 nicht eintreten.

Somit kommt für c nur die Lösung c = 6 in Frage.

Aufgabe 3   Bruchsalat

a) In einer Tabelle wird zu jedem Nenner von 1 bis 2013 die Anzahl der möglichen Brüche ermittelt.

Nenner	1	2	3	4	…	2013
Zahl der echten Brüche	0	1	2	3	…	2012

Dann gilt für die Gesamtanzahl z der echten Brüche:

$$z = 1 + 2 + 3 + ... + 2012 = \frac{2012 \cdot 2013}{2} = 2025078$$

b) Für die Summe der echten Brüche mit dem Nenner k (1 ≤ k ≤ 2013) erhält man:

$$\left(\frac{1}{k} + \frac{2}{k} + \frac{3}{k} + ... + \frac{k-1}{k}\right) = \frac{1}{k} \cdot \left(1 + 2 + 3 + ... + (k-1)\right) = \frac{1}{k} \cdot \frac{(k-1)k}{2} = \frac{1}{2}(k-1)$$

Damit lässt sich die gesuchte Gesamtsumme S bestimmen:

$$S = \sum_{k=1}^{k=2013} \left(\frac{1}{2} \cdot (k-1)\right) = \frac{1}{2} \cdot (0 + 1 + 2 + 3 + ... + 2012) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot 2012 \cdot 2013 = 1012539$$