FüMO 21 2. Runde Lösungen 8. Klasse

Aufgabe 1 Teilbar durch 27?

a) Für 999, 9369 und 545454 gilt Evas Behauptung:
Quersumme QS(999) = 27 und 999 = 27·37;
QS(9369) = 27 und 9369 = 27·347; QS(545454) = 27 und 545454 = 27·20202

b) Evas Behauptung trifft auf die Zahl 9549 = 27·353 + 18 nicht zu, 9549 nicht durch 27 teilbar ist, obwohl ihre Quersumme 27 durch 27 teilbar ist.

c) Evas Behauptung wird richtig, wenn z.B. zusätzlich gefordert wird, dass alle Ziffern der Zahl durch 3 teilbar sind.

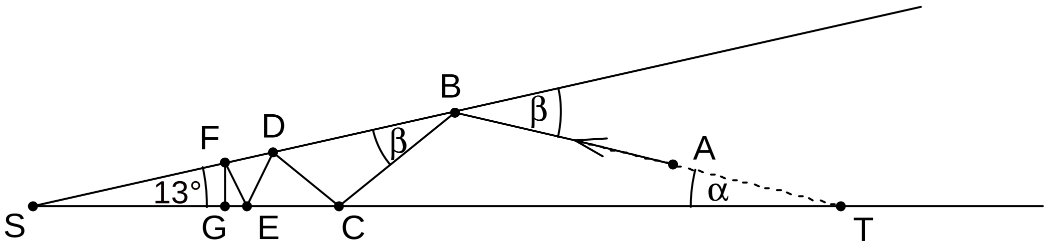
Beweis: Sei $z = 10^{n-1} \cdot a_{n-1} + 10^{n-2} \cdot a_{n-2} + \ldots + 10 \cdot a_1 + a_0$ die Dezimaldarstellung der Zahl z.

Dann gilt: $z = (10^{n-1}-1) \cdot a_{n-1} + a_{n-1} + (10^{n-2}-1) \cdot a_{n-2} + a_{n-2} + \ldots + (10-1) \cdot a_1 + a_1 + a_0$

$= (10^{n-1}-1) \cdot a_{n-1} + (10^{n-2}-1) \cdot a_{n-2} + \ldots + (10-1) \cdot a_1 + (a_{n-1} + a_{n-2} + \ldots + a_1 + a_0)$

Die Summe $(a_{n-1} + a_{n-2} + \ldots + a_1 + a_0)$ stellt die Quersumme der Zahl z dar und ist laut Voraussetzung durch 27 teilbar.
Die Faktoren vor den Ziffern a_k (k = 1,2, …, n-1) sind immer durch 9 teilbar. Sind die Ziffern a_k durch 3 teilbar, so sind die Produkte $(10^k-1) \cdot a_k$ demnach durch 27 teilbar.
Da eine Summe von Zahlen, die durch 27 teilbar sind, auch durch 27 teilbar ist, folgt die Teilbarkeit durch 27 für die gesamte Zahl z.

Aufgabe 2 Mathe-Billard



Da die Kugel bei G wieder nach F reflektiert wird, ist ∢ FGS = ∢ EGF = 90°.

Im Dreieck SGF ist ∢ SFG + 90° + 13° = 180°, also ist ∢ SFG = 77°.
Da die Kugel in F reflektiert wird, ist ∢ EFD = ∢ SFG = 77°.

Im Dreieck SEF ist ∢ FEG + 13° = ∢ EFD = 77° (Außenwinkel),
also ∢ FEG = 64° und deshalb auch ∢ CED = 64°

Im Dreieck SED ist ∢ SDE + 13° = ∢ CED = 64°, also ∢ FDE = 51° und damit ∢ CDE = 51°.
Im Dreieck SCD ist ∢ DCS + 13° = ∢ CDE = 51°, also ∢ DCE = 38° und damit ∢ TCB = 38°.
Im Dreieck SCB ist ∢ SBC + 13° = ∢ TCB = 38°, also ∢ SBC = 25° und damit β = 25°.
Im Dreieck STB ist α + 13° = β = 25°, also ist α = ∢ ATC = 12°.

Aufgabe 3 Regionalbahn

Es ist $\overline{AK} = 56$ und $\overline{AK} = \overline{AD} + \overline{DG} + \overline{GJ} + \overline{JK}$.

Wegen $\overline{AD}, \overline{DG}, \overline{GJ} \geq 17$ muss $\overline{JK} \leq 5$ sein, damit $\overline{AK} = 56$ gelten kann.

Weiter ist $\overline{HK} \geq 17$ und wegen $\overline{JK} \leq 5$ muss $\overline{HJ} \leq 12$ sein.

Somit gilt die Gleichheit für $\overline{HJ} = 12$.

Wegen $\overline{HK} \geq 17$ und $\overline{HJ} \leq 12$ muss $\overline{JK} \geq 5$ sein d.h. $\overline{JK} = 5$.

Aus Symmetriegründen folgt nun auch $\overline{AB} = 5$ und $\overline{BD} = 12$.

Somit ist $\overline{DH} = \overline{AK} - \overline{AB} - \overline{BD} - \overline{HJ} - \overline{JK} = 56 - 5 - 12 - 5 - 12 = 22$.

Weiter ist $\overline{GJ} \geq 17$ und mit $\overline{HJ} = 12$ ergibt sich $\overline{GH} \geq 5$.

Wegen $\overline{DG} \geq 17$ und $\overline{DH} = \overline{DG} + \overline{GH} = 22$ erhält man nun $\overline{DG} = 17$ und $\overline{GH} = 5$.

Schließlich ist $\overline{BG} = \overline{BD} + \overline{DG} = 12 + 17 = 29$.