FüMO 21 2. Runde Lösungen 7. Klasse

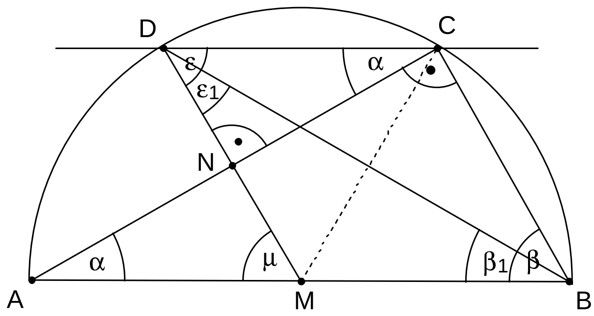
Aufgabe 1 Kaputter Tacho

Da der Tacho die Ziffer 5 nicht anzeigt, verwendet er nur 9 Ziffern. Er zählt die gefahrenen Kilometer also in einem „Neuner-Zahlensystem“ - nur, dass hier die Ziffern 6, 7, 8 und 9 die Ziffern 5, 6, 7, 8 des Zahlensystems mit der Basis 9 repräsentieren.
Die Ziffern 0, 1, 2, 3 und 4 bleiben unberührt.
Die angezeigte Zahl 002787 entspricht demnach der Zahl 002676 im Neunersystem mit den Ziffern 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8. Daraus ergibt sich für die Anzahl K gefahrener Kilometer

$$K = \mathbf{2} \cdot 9^3 + \mathbf{6} \cdot 9^2 + \mathbf{7} \cdot 9 + \mathbf{6} = 1458 + 486 + 63 + 6 = 2013.$$

Tom ist also 2013 km mit seinem Fahrrad gefahren.

Aufgabe 2 Winkelhalbierende?



a) Wegen <MAN = < DCA = α ist DC II MB.
Da C auf dem Thaleskreis über [AB] liegt, ist $\sphericalangle$ ACB = 90°.
Im Dreieck ABC ist also $\alpha + \beta = 90°$.
Im Dreieck AMN ist $\alpha + \mu = 90°$, also folgt $\beta = \mu$, d.h. DM II BC.
Damit ist das Viereck MBCD ein Parallelogramm mit $\overline{BC} = \overline{DM} = \overline{MC} = \overline{MB}$.
Also ist das Dreieck MBC gleichseitig mit $\beta = 60°$. Mit $\alpha + \beta = 90°$ folgt daher $\alpha = 30°$.

b) [BD ist die Winkelhalbierende von β.
1. Begründung: Wegen $\overline{BC} = \overline{DM} = \overline{MB}$ und $\overline{MB} = \overline{DC}$ ist das Viereck MBCD eine Raute und deshalb [BD als Diagonale eine Winkelhalbierende.
2. Begründung: Da $\overline{DM} = \overline{MB}$ ist das Dreieck MBD gleichschenklig mit der Spitze M und deshalb gilt für die Basiswinkel $\varepsilon_1 = \beta_1$.
μ ist Außenwinkel im Dreieck MBD, deshalb ist $\mu = \varepsilon_1 + \beta_1 = 2\,\beta_1$.
Wegen $\beta = \mu = 2\beta_1$ folgt $\beta_1 = \beta/2$. Also ist [BD die Winkelhalbierende von β.

Aufgabe 3 Eine unter Zehn

a) Unter zehn aufeinanderfolgenden natürlichen Zahlen sind bereits 5 durch 2 teilbar. Maximal 4 Zahlen sind durch 3 teilbar, davon sind zwei gerade und höchstens zwei ungerade. Es verbleiben noch mindestens drei ungerade Zahlen, die noch zu allen anderen teilerfremd sein können. Unter den zehn Zahlen gibt es höchstens zwei, die durch 5 teilbar sind, von denen eine gerade und eine ungerade ist. Gleiches gilt für die Teilbarkeit durch 7. Da jede größere Primzahl nur einmal vorkommen kann, verbleibt mindestens eine ungerade Zahl, die zu allen anderen teilerfremd ist.

b) Man verteilt die Primfaktoren 2, 3, 5 und 7 so, dass die Bedingung erfüllt ist.
Bsp.:

Zahl Nr.	1	**2**	3	4	5	6	7	8	9	10
Teiler 2	2	**x**	2		2		2		2	
Teiler 3	3	**x**		3			3			3
Teiler 5	5	**x**				5				
Teiler 7	7	**x**						7		

Damit erhält man die Zahlen 210, **211**, 212, 213, 214, 215, 216, 217, 218, 219, von denen nur die Zahl 211 zu allen anderen teilerfremd ist.
Es gibt allerdings noch eine weitere Lösung mit kleineren Zahlen:
Unter den 10 aufeinanderfolgenden natürlichen Zahlen 90, 91, 92, ... , 99 ist nur 97 teilerfremd zu allen anderen.