FÜMO 21 1. Runde Lösungen 6. Klasse

Aufgabe 1

Die Dreiecke können aus einem, zwei oder mehreren der zwölf Teilflächen bestehen:

Anzahl k der Teilflächen	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Anzahl der Dreiecke mit k Teilflächen	10	6	10	6	-	2	-	2	-	-	-	-

Es gibt 10 dreieckige Puzzlestücke mit den Nummern 1, 2, 3, 4, 6, 7, 9, 10, 11 und 12.

Dazu gibt es 6 Dreiecke mit 2 Puzzleteilen, nämlich (1|12), (2|3), (2|4), (6|7), (9|11) und (10|11).

Aus 3 Puzzlestücken bestehen folgende 10 Dreiecke: (1|2|4), (1|2|12), (2|4|9), (4|5|6), (4|9|11), (5|6|7), (6|7|8), (7|8|9), (9|11|12) und (11|12|1).

4 Teile benötigen die 6 Dreiecke (1|2|3|12), (1|10|11|12), (2|4|8|9), (3|5|6|7), (4|5|9|11) und (6|7|8|10).

Nun gibt es noch 2 Dreiecke mit 6 Teilen, nämlich (1|2|4|9|11|12) und (4|5|6|7|8|9),
sowie 2 Dreiecke mit 8 Stücken, nämlich (2|3|4|5|6|7|8|9) und (4|5|6|7|8|9|10|11).

Insgesamt gibt es damit 10+6+10+6+2+2 = **36 Dreiecke**.

Aufgabe 2

Wir rechnen zurück: Wenn ein Zehntel des Kanneninhalts in das Fass gefüllt sind, bleiben 9/10 des Zwischenstands in der Kanne, was ja 9 Liter sind. Vor dieser letzten Umschüttung (also nach der 2. Umfüllung) waren damit in der Kanne 10 l, im Eimer 9 l und im Fass 8 l, da ja beim letzten Gießen ein Liter ins Fass kommt.
Die 9 Liter des Eimers sind 3/4 des Inhalts nach der ersten Umfüllung (1/4 kommt ja in die Kanne!). Im Eimer waren also nach der 1. Umfüllung 12 l, wovon ein Viertel, also3 l, anschließend in die Kanne geschüttet werden. Nach dem 1. Umgießen waren im Eimer 12 l, in der Kanne 7 l und im Fass der Rest, also 8 l.
Diese 8 l sind 2/3 des ursprünglichen Fassinhalts. Am Anfang hatte also das Fass 12 l, die Kanne 7 l (keine Veränderung beim 1. Umfüllen!) und der Eimer 8 l Wasser.

Aufgabe 3

a) Für dreistellige Zebra-Zahlen gilt: Für die Hunderter- und die Einerstelle gibt es 9 (keine 0), für die Zehnerstelle ebenfalls 9 Möglichkeiten (gleiche Ziffern nicht erlaubt). Damit gibt es $9 \cdot 9 = 81$ dreistellige Zebra-Zahlen.
Da eine Zebra-Zahl durch ihre ersten beiden Ziffern festgelegt ist, gibt es bei jeder Erhöhung der Stellenzahl 81 neue Zebra-Zahlen.

   Wegen $2012 = 24 \cdot 81 + 68$ ist die gesuchte Zahl die 68. Zahl bei der 24. Stellenerweiterung, hat also 3 + 24 = 27 Stellen. Da es jeweils 9 Möglichkeiten für die 1. und die 2. Ziffer gibt, unterteilen wir 68 in 9er-Gruppen:

   $68 = 7 \cdot 9 + 5$, d.h. 68 befindet sich als 5. Zahl in der 8. Gruppe. Da in der 8. Gruppe alle Zahlen mit 8 beginnen, fängt unsere Zahl mit 8 an. Bei der 2. Stelle startet die Zählung bei 0, weshalb die 5. Zahl eine 4 an der 2. Stelle hat.

   Die 2012. Zebra-Zahl lautet damit **8484…848** mit 27 Stellen.

b) Nach a) gibt es für jede Stellenzahl ≥ 3 jeweils 81 Möglichkeiten. Bis zur größten 2011-stelligen Zahl 9898…9 gibt es genau $2009 \cdot 81 = 162729$ Zebra-Zahlen. Die Zahl 4141…41 mit 2012 Stellen ist dann die $3 \cdot 9 + 2 = 29$. Zahl mit dieser Stellenzahl.
Die Zahl 4141..41 mit 2012 Stellen hat daher den **162758. Platz** in dieser Reihenfolge.