FÜMO 20 2. Runde Lösungen 6. Klasse

Aufgabe 1

a) Wir ergänzen die Mädchen mit E und F, die Jungen mit N und O. Für die Mädchen gibt es die Möglichkeit, mit 0, 1, 2, 3, 4 und 5 Jungen befreundet zu sein. Alle Mädchen sind also insgesamt mit 0 + 1 + 2 + 3 + 4 + 5 = 15 Jungen befreundet. Daher muss jeder Junge mit drei Mädchen befreundet sein. In nebenstehender Tabelle sind befreundete Paare durch Kreuze gekennzeichnet. Bildet man die Summen, erkennt man die Behauptung.

	A	B	C	D	E	F	
K		x	x			x	3
L			x		x	x	3
M				x	x	x	3
N				x	x	x	3
O				x	x	x	3
	0	1	2	3	4	5	

b) Bei 7 Mädchen und 6 Jungen kann es insgesamt nur 0 + 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 = 21 Freundschaften mit Jungen geben. Da 6 kein Teiler von 21 ist, können 6 Jungen nicht mit der gleichen Zahl Mädchen befreundet sein.

Aufgabe 2

a) Für jede Stellenzahl größer als 1 gibt es jeweils 9 Schnapszahlen. Also unterteilen wir 2012 in 9er-Gruppen: 2012 = 223·9 + 5. Damit ist die gesuchte Zahl die 5. Zahl in der 224-ten 9er-Gruppe. Da die ersten neun Schnapszahlen zweistellig sind, sind die Schnapszahlen in der 224-ten Neunergruppe 225-stellig, d.h. die 2012. Schnapszahl ist 5555…5 mit 225 Stellen.

b) Da es für jede Stellenzahl > 1 jeweils 9 Schnapszahlen gibt, sind es bis zu 999…9 mit 2011 Stellen genau 2010·9 = 18090 Schnapszahlen. Bis zur 444…4 mit 2012 Stellen sind es weitere 4. Also steht diese Zahl an der 18094. Stelle.

Aufgabe 3

Im Turnier werden 6 Spiele ausgetragen mit den Ergebnissen 10:0, 9:1, 8:2, 7:3, 6:4 und 5:5.

a) Die drei Siege mit den geringsten Torunterschiede lauten: 6:4, 7:3 und 8:2, weshalb die Klasse 6c bei drei Siegen mindestens 2+4+6 = 12 Tore mehr geschossen als erhalten hat. (Widerspruch zu Bernds Aussagen!)

b) Die insgesamt 12 Punkte können nach a) folgendermaßen auf die vier Klassen (6c,6b,6a,6d) verteilt werden: I(5,5,2,0),II(5,5,1,1), III(5;4;3,0), IV(5,4;2,1), V(5,3,3,1),VI(5,3,2,2), VII(4,4,4,0), VIII(4,4,3,1), IX(4,4,2,2), X(4;3;3;2) oder XI(3,3,3,3).
Da ein Spiel unentschieden endet und nur die zwei beteiligten Klassen ungerade Punktzahlen haben, entfallen die Möglichkeiten II, V, VII, IX und XI. Hätte die drittplatzierte Klasse 6a unentschieden gespielt, so könnte mit den beiden restlichen Spielen das Torverhältnis nicht ausgeglichen sein. Damit entfallen weiter III, VIII und X. Auch I tritt nicht auf, denn neben dem Spiel 0:0 (gegen die Klasse 6b) gewinnt die Klasse 6c 8:2 und 6:4 (Tordifferenz 8!); für die zweitplatzierte Klasse 6b blieben noch zwei Siege von 10:0, 9:1 oder 7:3, also eine Tordifferenz von mindestens 12, wonach 6b also Erster wäre. Es bleiben daher nur noch die Punktverteilungen IV(5,4,2,1) oder VI(5,3,2,2) übrig. (6c hat sicher 2 Siege und ein Unentschieden erreicht.)
Das ausgeglichene Torverhältnis von 6a kann nur durch folgende Ergebniskonstellationen erreicht werden: A(10:0; 1:9; 4:6), B(10:0, 3:7; 2:8), C(9:1; 2:8, 4:6) oder D(8:2; 3:7; 4:6).
B und D fallen weg, da nur 6d einmal 3 Tore geschossen hat. Auch C entfällt, da die Klasse 6c nur bei den Siegen 8:2 und 6:4 gegen 6b oder 6a eine Tordifferenz von 8 Toren aufweist. Da nur Möglichkeit A zutrifft, muss also das Spiel 6c:6a das Ergebnis <u>6:4</u> haben.

c) Nach b) spielte 6c gegen 6a 6:4 und daher entweder gegen 6b oder gegen 6d unentschieden.
<u>1. Fall:</u> 6c:6b = 5:5 (Punktverteilung VI(5,3,2,2)) und damit 6c:6d = 8:2
Da nach VI 6d ein Spiel gewinnt und einmal 3:7 verliert (nicht gegen 6a!), muss 6d die Klasse 6a mit 9:1 besiegen (Ergebniskonstellation A!) und gegen 6b mit 3:7 verlieren, weshalb 6a noch die Klasse 6b mit 10:0 besiegt.
Tabelle <u>1) 6c (19:11, 5 P.), 2) 6b 12:18, 3 P.), 3) 6a (15:15, 2 P.), 4) 6d (14:16, 2 P.)</u>

<u>2: Fall:</u> 6c:6d = 5:5 (Punktverteilung IV(5,4,2,1)) und damit 6c:6b = 8:2
Nach Punktverteilung IV hat 6d nie gewonnen, also auch gegen 6a verloren, weshalb nach b) (Ergebniskonstellation A) die Spiele 6a:6d = 10:0 und 6a:6b = 1:9 endeten. Das letzte Ergebnis ist: 6d:6b = 3:7.
Tabelle: <u>1) 6c (19:11, 5 P.) 2) 6b (18:12, 4 P.) 3) 6a (15:15, 2P.) 4) 6d (8:22, 1 P.)</u>