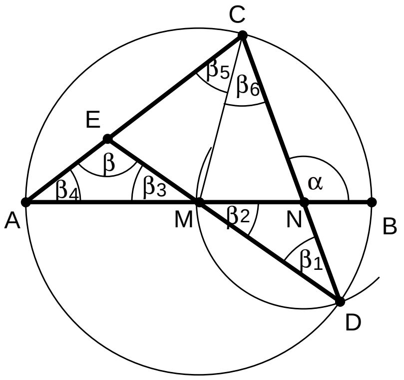
Lösungen FüMO 20 1. Runde Klassenstufe 8

Aufgabe 1 Winkeljagd



$\sphericalangle$MND und α sind Scheitelwinkel, also ist < MND = α;
β_1 und β_2 sind Basiswinkel im gleichschenkligen Dreieck MND, also gilt $\beta_2 = \beta_1$;
Für die Winkelsumme im Dreieck MND gilt:
$\sphericalangle$MND + β_1 + β_2 = 180°, d.h. $2\beta_1 + \alpha = 180°$,
bzw. $\alpha = 180° - 2\beta_1 = \beta$ (wegen $\alpha = \beta$) (#) ;
β_3 und β_2 sind Scheitelwinkel, also ist $\beta_3 = \beta_2 = \beta_1$;
Für die Winkelsumme im Dreieck AME gilt:
$\beta_3 + \beta_4 + \beta = 180°$, d.h. $\beta_3 + \beta_4 + 180° - 2\beta_1 = 180°$,
woraus folgt: $\beta_4 = \beta_1$;
β_5 und β_4 sind Basiswinkel im gleichschenkligen Dreieck AMC, also gilt $\beta_5 = \beta_4 = \beta_1$;
β_6 und β_1 sind Basiswinkel im gleichschenkligen Dreieck AMC, also gilt $\beta_6 = \beta_1$;
$\sphericalangle$MEC und β sind Nebenwinkel, also ist $\sphericalangle$MEC = 180° – β; damit gilt für die Winkelsumme im Dreieck ECD: $\beta_1 + \beta_5 + \beta_6 + (180° - \beta) = 180°$, woraus folgt $\beta = 3\beta_1$. Dies eingesetzt in (#) ergibt $180° - 2\beta_1 = 3\beta_1$, also $5\beta_1 = 180°$, d.h. $\beta_1 = 36°$ und damit $\alpha = \beta = 108°$.

5

Aufgabe 2 Zahlenwischerei

a) Beim Streichen zweier Zahlen gibt es folgende Möglichkeiten

Zwei Zahlen gerade/ungerade	Differenzwert (g oder u) anschreiben	Veränderung der $\text{Anzahl}_{\text{gerade Zahlen}}$ = Ag	Veränderung der $\text{Anzahl}_{\text{ungerade Zahlen}}$ = Au
g und g	g	Ag - 1	Au bleibt
g und u; u und g	u	Ag - 1	Au bleibt
u und u	g	Ag+ 1	Au - 2

Von den 2011 Zahlen auf der Tafel sind 1005 gerade und 1006 ungerade. Um die Anzahl der ungeraden Zahlen zu reduzieren, muss man irgendwann je zwei ungerade Zahlen auswählen. Dies muss man 503-mal tun. Damit sind alle ungeraden Zahlen verschwunden und die letzte Zahl kann nur eine gerade sein.

b) Die kleinstmögliche Endzahl ist 0 (nach a gerade, diese Differenzbildung kann keine negative Zahl liefern). Verfahre z.B. so: Wähle immer die größte und zweitgrößte Zahl aus und subtrahiere sie voneinander. Dies liefert 1005-mal den Differenzwert 1. Dazu kommt die noch nicht verwendete 1 aus der Originalreihe. Jetzt stehen 1006 Einsen an der Tafel, die alle durch 503 Differenzen in Nullen verwandelt werden können. Bildet man nun Differenzen, erhält man als letzte Zahl 0.

Die größtmögliche Endzahl ist 2010 (nach a) gerade, Differenzbildung kann keine größere Zahl liefern). Verfahre z.B. so: Wähle immer die zweitgrößte und drittgrößte Zahl aus und subtrahiere sie voneinander. Dies liefert 1005-mal den Differenzwert 1. Dazu kommt noch die nicht verwendete 2011. 1004 Einsen an der Tafel können durch 502 Differenzen in Nullen verwandelt werden können, die durch weitere Differenzen beseitigt werden können. Die letzte 1 wird mit 2011 zu 2010.

5

Aufgabe 3 2011/2012

1. Fall: 2011 Folgenglieder

$$S = m + (m+1) + ... + (m+2010) = 2011 \cdot m + \tfrac{1}{2} \cdot 2010 \cdot 2011 = 2011 \cdot (m+1005) = Z^2$$

da 2011 prim ist, muss gelten: $m + 1005 = 2011 \cdot n^2$

$$\Rightarrow\ m = 2011 \cdot n^2 - 1005 > 0\ \Rightarrow\ n^2 > \tfrac{1005}{2011}\ \Rightarrow\ n \geq 1$$

Kleinste Folge für n=1 1006, 1007,…,3016

Probe: $S = \frac{3016 \cdot 3017}{2} - \frac{1005 \cdot 1006}{2} = 4044121 = 2011^2$

2. Fall: 2012 Folgenglieder

$$S = m + (m+1) + ... + (m+2011) = 2012 \cdot m + \tfrac{1}{2} \cdot 2011 \cdot 2012 = 1006 \cdot (2m+2011) = Z^2$$

da $1006 = 2 \cdot 503$ und beide Faktoren prim sind, müsste gelten:

$\underbrace{2m+2011}_{ungerade} = \underbrace{1006 \cdot n^2}_{gerade}$ $\Rightarrow$ Widerspruch $\Rightarrow$ keine Lösung möglich.

5