Lösungen FüMO 19 2. Runde Klassenstufe 8

Aufgabe 1:

Die dreistelligen Zahlen müssen aus Ziffern bestehen, die Teiler der vorgegebenen Zahl sind.
Brauchbar sind daher nur Teiler mit $t \in N$ und $1 \le t \le 9$.
$T_{61} = \{1; 61\}$, $T_{62} = \{1; 2; 31; 62\}$, $T_{63} = \{1; 3; 7; 9; 21; 63\}$, $T_{64} = \{1; 2; 4; 8; 16; 32; 64\}$
61 und 62 liefern keine Lösung
63 liefert Lösungen: 179 und Permutationen der Ziffern liefert 6 Lösungen
337 und Permutationen der Ziffern liefert 3 Lösungen
64 liefert Lösungen: 188 und Permutationen der Ziffern liefert 3 Lösungen
248 und Permutationen der Ziffern liefert 6 Lösungen
444 und Permutationen der Ziffern liefert 1 Lösung
Es gibt insgesamt 19 Lösungen

Aufgabe 2:

Es ist $r_n = n$

$$A_{ges} = \tfrac{\pi}{4} \cdot \left(r_n^2 + r_{n-1}^2 + r_{n-2}^2 + r_{n-3}^2\right) + 1 = \tfrac{\pi}{4} \cdot \left(n^2 + (n-1)^2 + (n-2)^2 + (n-3)^2\right) + 1 =$$

$$= \tfrac{\pi}{4} \cdot \left(n^2 + n^2 - 2n + 1 + n^2 - 4n + 4 + n^2 - 6n + 9\right) + 1 =$$

$$= \tfrac{\pi}{4} \cdot \left(4n^2 - 12n + 14\right) + 1 \le 19 \cdot 2011 = 38209;\text{ also muss gelten:}$$

$$4n^2 - 12n + 14 \le \frac{38208 \cdot 4}{\pi} \;;\; n^2 - 3n + 3{,}5 \le \frac{38208}{\pi};\; n^2 - 3n \le \frac{38208}{\pi} - 3{,}5 = 12158{,}48$$

wegen $n \in N$ folgt: $n^2 - 3n \le 12158 = m$

n	110	111	112
$n^2 - 3n$	11770 < m	11988 < m	12208 > m

Die letzte volle Windung wird für n=108 erreicht.
Man erreicht daher maximal 27 volle Windungen.

Aufgabe 3:

Eine konstante Folge (d = 0) ist wegen der Forderung (b) nicht möglich.
Wir betrachten daher d > 0.
Sei $a \in Z$; $d \in N$; $2011 \in P$; dann erhält man die Folge: a, $a + d$, $a + 2d$, ..., $a + kd$

Dann soll gelten: $S = (k+1)a + d \cdot \frac{k(k+1)}{2} = 2011 \Rightarrow a = \frac{2011}{k+1} - \frac{kd}{2}$

Sei nun **k gerade**

$k = 2 \cdot l \Rightarrow \frac{k \cdot d}{2} = l \cdot d \in Z \Rightarrow k + 1 = 2011 \Rightarrow k = 2010 \Rightarrow l = 1005$

$a = 1 - 1005d$; größtes Summenglied $= a + 2010d = 1005d + 1 \le 5000$; $d \le \frac{5000-1}{1005} < 5$

d	1	2	3	4
a	-1004	-2009	-3014	-4019
a+2010d	1006	2011	3016	4021

Sei nun **k ungerade**

1. Fall: d gerade $\Rightarrow a + \frac{kd}{2} \in Z$, aber $\frac{2011}{k+1} \notin Z \Rightarrow$ keine Lösung

2. Fall: d ungerade $\Rightarrow \frac{k \cdot d}{2}$ ist halbzahlig $\Rightarrow \frac{2011}{k+1}$ ist halbzahlig $\Rightarrow k + 1 = 4022 \Rightarrow k = 4021$

$a = \frac{1}{2} - \frac{4021 \cdot d}{2}$; größtes Glied = a+4021d $= \frac{1}{2} - \frac{4021 \cdot d}{2} + 4021d = \frac{1 + 4021d}{2} \le 5000$; $\Rightarrow d \le \frac{9999}{4021} < 3$

d	1
a	-2010
a+4021d	2011

Dies ergibt zusammen (4+1) = 5 erstaunliche Folgen. Berücksichtigt man, dass man jede dieser Folge auch in umgekehrter Reihenfolge schreiben kann, erhält man insgesamt 10 erstaunliche Folgen