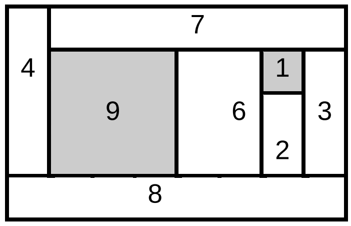
Lösungen FüMO 19 2. Runde Klassenstufe 6

Aufgabe 1

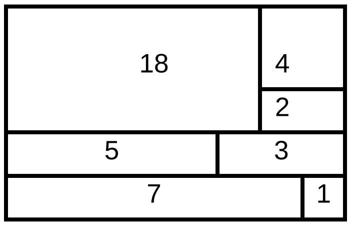
a) Wenn alle Rechtecke verschiedenen Flächeinhalt haben, dann haben 8 Rechtecke mindestens den Flächeninhalt 1 + 2 +3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 = 36 < 40, aber 9 Rechtecke mindestens den 36 + 9 = 45 > 40. 1

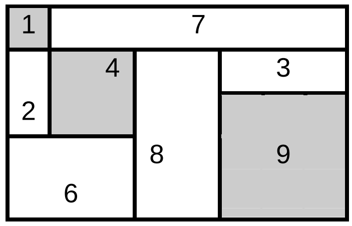


b) Siehe Abbildung! 2

c) Sechs Rechtecke sollen möglichst klein sein:
1 + 2 +3 + 4 + 5 + 6 + 19 = 40.

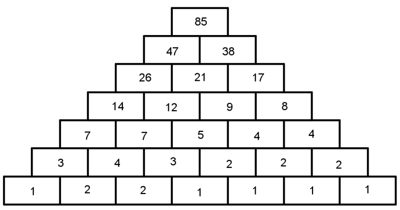
Da 19 größer als die Breite 8 ist, kann das Rechteck höchstens einen Flächeinhalt von 18 = 3·6 haben: 2
1 + 2 +3 + 4 + 5 + 7 + 18 = 40

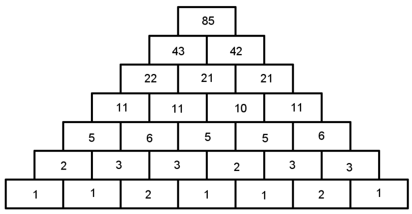


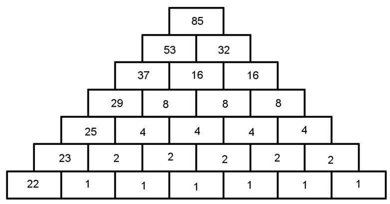


Aufgabe 2

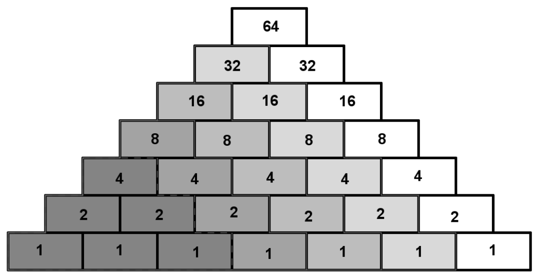
a) Die Mauer kann höchstens 7 Stufen hoch sein. Wäre die Mauer 8 Stufen hoch, hätte sie 8 Anfangssteine. Würde man die kleinstmöglichen Zahlen (lauter Einser) auf die Anfangssteine schreiben, so wäre auf dem obersten Stein bereits die Zahl 128 (zu groß).
Drei mögliche Lösungen sind:: 2







b) Die Mauer wird möglichst hoch, wenn man die Zahlen der untersten Reihe möglichst klein wählt. Bei n Anfangssteinen mit jeweils der Zahl 1 ergibt sich 2^{n-1} als oberster Stein (siehe Grafik). 3
Bei n =11 ist 2^{10} = 1024 der kleinstmöglich oberste Stein. Für n = 12 ist 2^{11} = 2048 der oberste Stein bereits zu groß. Also kann die Mauer höchstens 11 Stufen hoch sein. Man bekommt eine Lösung, wenn man auf alle Anfangssteine die 1 setzt und nun einen Außenstein um die Differenz 2011-1024 erhöht (ergibt 1+987 = 988 für diesen Außenstein).



Aufgabe 3

Die ersten Potenzen von 3 lauten: 2
$3^1 = 3;\ 3^2 = 9;\ 3^3 = 27;\ 3^4 = 81;\ 3^5 = 243;\ 3^6 = 729;\ 3^7 = 2187;\ 3^8 = 6561;$
d.h. die Endziffern 3, 9 ,7 und 1 werden in dieser Reihenfolge wiederholt.
Genauer: Ist die Hochzal ein Vielfaches von 4 wie bei 444, so lautet die Endziffer 1.
Analog haben die Potenzen von 4 die Werte:
$4^1 = 4;\ 4^2 = 16;\ 4^3 = 64;\ 4^4 = 256;\ 4^5 = 1024;\ 4^6 = 4096;$ auch hier wiederholen sich die 2
Endziffern 4 und 6, wobei bei jeder ungeraden Hochzahl (wie bei 333) die Endziffer 4 auftritt.
Damit hat aber die Summe $3^{444} + 4^{333}$ die Endziffer 1+4 = 5, also ist sie durch 5 teilbar. 1