Lösungen FÜMO 18 2. Runde Klassenstufe 8

Aufgabe 1

a) Wiederholt sich die Abfolge zweier Ziffern in der Folge, so wiederholt sich auf Grund der Konstruktion der Fibonacci Zahlen die ganze Ziffernfolge.

Die Ziffernfolge ...00...kann nicht entstehen, weil die Null aus zwei Ziffern $\neq$ 0 entstehen muss. Dann ist aber die auf die Null folgende Ziffer $\neq$ 0. Das heißt, die Ziffernfolge ist kein abrechender Dezimalbruch.

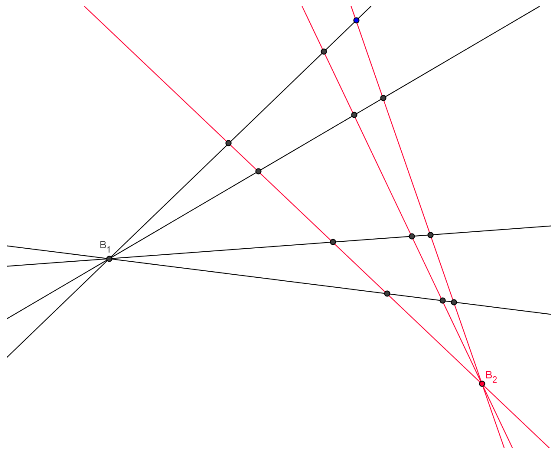
Für zwei aufeinanderfolgende Ziffern gibt es $10 \cdot 10$ Möglichkeiten. Daher taucht spätestens nach 100 Ziffern die gleiche Ziffernpaarung erneut auf. Damit ist die Folge der Dezimalzahlen periodisch.

b) Die Dezimalzahl heißt:

$$0,\underbrace{1123583145}_{10\ Ziffern}\underbrace{9437077415}_{10\ Ziffern}\underbrace{6178538190}_{10\ Ziffern}\underbrace{9987527965}_{10\ Ziffern}\underbrace{1673033695}_{10\ Ziffern}\underbrace{4932572910}_{10\ Ziffern}\underbrace{11.....}$$

Also ist die Periode ist 60 Ziffern lang

Aufgabe 2



a) Siehe Zeichnung, es gibt 3·4 + 2 = 14 Schnittpunkte.

b) a sei die Anzahl der Geraden des 1. Büschels,
b sei die Anzahl der Geraden des 2. Büschels.

Dann gilt: ab+2=2010; ab = 2008 = 8·251

Teiler von 2008: 1; 2; 4; 8; 251; 502; 1004; 2008

$a = \frac{8 \cdot 251}{b}$ $\Rightarrow$ b muss Teiler von 2008 sein.

Da a und b mindestens 3 sein müssen (Definition des Geradenbüschels), kommen nur die folgenden Paare in Frage:

b>2	**4**	**8**	251	502
a>2	**502**	**251**	8	4

Wegen der Symmetrie kommen nur die fettgedruckten Paare als Lösungen in Frage.

Bemerkung: Die Definition des Büschels in der Aufgabe lässt auch die Interpretation zu, dass eine Gerade des einen Büschels durch den Schnittpunkt des anderen Büschels geht, ohne diesem anzugehören. Für diese nicht vorgesehenen Fälle erhält man die zusätzlichen Lösungen:
1. Fall: g von Büschel 1 geht durch S_2: a) 11 Schnittpunkte b) Lsgspaare: 4 und 503, 8 und 252.
2. Fall: g von Büschel 2 geht durch S_1: a) 10 Schnittpunkte b) Lsgspaare: 5 und 502, 9 und 251.

Aufgabe 3

Die **größte** Zahl muss möglichst viele Stellen und möglichst große Ziffern haben.
Die maximale Stellenzahl ist 108, denn dies ist die größte Zahl, die sich in eine zweistellige und eine einstellige Zahl zerlegen lässt: 108 = 99 + 9
Da 9 die größte ungerade Ziffer ist, wählt man 99mal die Ziffer 9 und 9mal die Ziffer 8 (als gerade Ziffer).
Die größte Zahl heißt also: $\underbrace{99\ \ldots\ 9}_{99\ \text{mal}}888\ 888\ 888 \rightarrow 108999.$

Die **kleinste** Zahl muss möglichst wenig Stellen und möglichst kleine Ziffern haben.
Die kleinste zweistellige Zahl, die sich in zwei zweistellige Zahlen zerlegen lässt, ist 20 = 10 + 10.
Da 0 die kleinste gerade und 1 die kleinste ungerade Ziffer ist, die 0 aber nicht an erster Stelle stehen kann, ist die kleinste Zahl 10 000 000 000 111 111 111 $\rightarrow$ 201010.