Lösungen FÜMO 18 2. Runde Klassenstufe 7

Aufgabe 1

BAB $\xrightarrow{(1)}$ BABBAB $\xrightarrow{(2)}$ BAAB $\xrightarrow{(1)}$ BAABBAAB $\xrightarrow{(2)}$ BAAAAB

BAAAAB $\xrightarrow{(3)}$ BABB $\xrightarrow{(2)}$ BA $\xrightarrow{(1)}$ BABA $\xrightarrow{(4)}$ **BABAB**

BABABA und ABABA können beide nicht erzeugt werden.
Auf ABA kann nur Regel (1) mehrmals angewendet werden. Damit erhält man 2, 4, 8, 16, 32,… mal den Buchstaben A, aber niemals dreimal ein A, auch ein Doppel-B kann man so nicht erzeugen.
Bei BAB kann die Anzahl des Buchstabens A nur verdoppelt werden nach Regel (1) und (2) oder um 3 verkleinert werden nach Regel (3). Auch hier kann es nie dreimal den Buchstaben A geben.

Aufgabe 2

Wenn $\frac{z}{n}$ durch 2 gekürzt werden kann, dann geht auch $\frac{z+2}{n+2}$; $\frac{z+4}{n+4}$; $\frac{z+6}{n+6}$ und $\frac{z+8}{n+8}$ durch 2.

Wenn $\frac{z}{n}$ durch 3 gekürzt werden kann, dann geht auch $\frac{z+3}{n+3}$; $\frac{z+6}{n+6}$ und $\frac{z+9}{n+9}$ durch 3.

Wenn $\frac{z}{n}$ durch 5 gekürzt werden kann, dann geht auch $\frac{z+5}{n+5}$ durch 5.

Wenn $\frac{z}{n}$ durch 7 gekürzt werden kann, dann geht auch $\frac{z+7}{n+7}$ durch 7.

Also gilt wegen 2 · 3 · 5 · 7 = 210: $\frac{z}{n} = \frac{210z'}{210n'}$.

Damit man $\frac{z+1}{n+1}$ kürzen kann, muss 210z’+1 und 210n’+1 durch eine andere Primzahl als 2, 3, 5 und 7 teilbar sein, z.B. 11.
Dies gilt z.B. für z' = 10, da (210 · 10 +1) :11 = 2101 : 11 = 191, also z = (210 · 10 +1) - 1 = 2100, und für n' = 21, da (210 · 21 +1) : 11 = 4411 : 11 = 401, also ist n = (210 · 21 +1) - 1 = 4410.l

Also folgt: **z = 2100 und n = 4410 ist eine mögliche Lösung.**

Aufgabe 3

a) z.B. 123456789 → 945 → 312 oder 5 → 101 → 312

b) Eine Zahl kleiner als eine Trillion hat maximal 18 Stellen. Da man die Zahl 18 nur in eine zweistellige und eine einstellige (z.B. 16 und 2) oder in zwei einstellige Zahlen (z.B. 9 und 9) zerlegen kann, ist die nächste Zahl in der Folge höchstens fünfstellig, z.B. 18162.

Eine fünfstellige Zahl muss in eine dreistellige Zahl übergehen, da sie mit 5 beginnt und dann aus zwei Ziffern nicht größer als 5 besteht. (18162 → 532)

Jede dreistellige Zahl hat maximal drei gerade oder drei ungerade Ziffern.

Damit gibt es nur folgende Möglichkeiten: Dreistellige Zahl → $\begin{cases} 330 \rightarrow 312 \\ 321 \rightarrow 312 \\ 312 \quad \text{fertig!} \\ 303 \rightarrow 312 \end{cases}$