Lösungen FÜMO 17 2. Runde Klassenstufe 8

Aufgabe 1

Es sei $R_m = mr_1$ und $R_n = nr_1$ mit n < m (n,m nat. Zahlen)

$$r_1^2 \cdot \pi \cdot [(m+1)^2 - m^2] = 2009 \cdot r_1^2 \cdot \pi \cdot [(n+1)^2 - n^2]$$

$(m+1)^2 - m^2 = 2009 \cdot [(n+1)^2 - n^2]$; $2m + 1 = 2009 \cdot 2 \cdot n + 2009$

Also ist m = 2009n + 1004. Damit gibt es für jede natürliche Zahl n eine Lösung. 5

D.h. der Kreisring mit $r_a = 3014r_1$ und $r_i = 3013r_1$ hat den 2009-fachen Flächeninhalt wie der kleinste Kreisring mit $r_a = 2r_1$ und $r_i = r_1$.

Probe für n=1: $m = 2009 + 1004 = 3013$

l.S.= $r_1^2 \cdot \pi \cdot [(m+1)^2 - m^2] = r_1^2 \cdot \pi \cdot [3014^2 - 3013^2] = r_1^2 \cdot \pi \cdot 6027$

r.S.= $2009 \cdot r_1^2 \cdot \pi \cdot [(1+1)^2 - 1^2] = 2009 \cdot r_1^2 \cdot \pi \cdot 3 = r_1^2 \cdot \pi \cdot 6027$

Es gilt: l.S. = r.S., also ist die Forderung erfüllt.

Aufgabe 2

$\frac{a}{49} - \frac{b}{41} = \frac{17}{2009} \quad | \cdot 2009 \qquad 41a - 49b = 17 \quad \Rightarrow \quad 41a = 49b + 17$

$\Rightarrow \quad a = b + \frac{8b+17}{41}$

Wir fordern $8b + 17 = 41k$ mit $k \in Z$. Dann ist $b = \frac{41k-17}{8} = 5k - 2 + \frac{k-1}{8}$

Wir fordern $k - 1 = m \cdot 8 \quad \Rightarrow \quad k = 8 \cdot m + 1$ mit $m \in Z$. 5

Dann ist $b = 5 \cdot (8 \cdot m + 1) - 2 + m = 41 \cdot m + 3$ und

$a = 41 \cdot m + 3 + k = 41; \quad m + 3 + 8 \cdot m + 1 = 49 \cdot m + 4$.

Also haben alle Lösungspaare (a;b) die Form: $(49 \cdot m + 4 \; ; \; 41 \cdot m + 3)$ mit $m \in Z$.

Probe: $l.S. = m + \frac{4}{49} - m - \frac{3}{41} = \frac{4 \cdot 41 - 3 \cdot 49}{2009} = \frac{17}{2009} = r.S.$

Aufgabe 3

34! = 295 232 799 cd9 604 140 847 618 609 643 5ab 000 000.

Eine (verkürzte) Zerlegung der Zahl in Primfaktoren ergibt: $34! = P \cdot 11^3 \cdot 7^4 \cdot 5^7 \cdot 3^{15} \cdot 2^{32}$.

Darin bezeichnet P das Produkt aller enthaltenen Primzahlen ≥ 13, die aber nicht benötigt werden. 1

Da 34! genau 32mal den Primfaktor 2 besitzt aber nur sieben Mal den Teiler 5, endet 34! auf genau sieben Ziffern Null. Also ist **b = 0**.

Mithilfe der Teilerregel für 8 lässt sich jetzt die Ziffer a bestimmen. Wegen b = 0 muss $\overline{35a}$ durch 8 teilbar sein. Nur die Zahl 352 erfüllt diese Bedingung. Also ist **a = 2**.

Mit der Neunerregel erhält man eine erste Bedingung für das Paar (c,d). Es gilt nämlich:

Die Quersumme von 34! muss ein Vielfaches von 9 sein. Einfaches Nachrechnen liefert:

QS(34!) = 141+c+d. Wegen c+d ≤ 18 und QS(141) = 6, kann die Summe c+d nur die beiden Werte 2

3 oder 12 annehmen $\Rightarrow$ **(1) c+d $\in$ {3;12}.**

Nach der Teilbarkeitsregel für die Zahl 11 muss nun zusätzlich gelten:

Der Unterschied zwischen der Summe aller Ziffern auf ungeraden Stellen und der Summe aller Ziffern auf geraden Stellen muss ein Vielfaches von 11 sein.

Nachrechnen liefert:

$(2+5+3+7+9+d+6+4+4+8+7+1+6+9+4+5+0)-(9+2+2+9+c+9+0+1+0+4+6+8+0+6+3+2) = k\cdot 11$

bzw. $80 + d - (61+c) = k\cdot 11$ und schließlich $19+d-c = k\cdot 11$.

Wegen $19+d-c \leq 9$ sind für k nur die Werte 1 oder 2 möglich.
Somit ist a) $19+d-c = 11$ oder b) $19+d-c = 22$ und
nach Vereinfachung: **(2)** $c = d+8$ bzw. **(3)** $d = c+3$.

Nach Addition von d bzw. c auf beiden Seiten der Gleichungen, erhalten wir:

(2*) $c+d = 2d + 8$ bzw. **(3*)** $c+d = 2c + 3$.

Nach (1) unterscheiden wir zwei Fälle:

a) $c+d = 3$. Aus (2*) $\Rightarrow$ $3 = 2d + 8$ oder $2d = 5$ Widerspruch zur Ganzzahligkeit von d.

Aus (3*) $\Rightarrow$ $3 = 2c + 3$ oder $\mathbf{c = 0}$. Nach (1) folgt daraus unmittelbar $\mathbf{d = 3}$.

b) $c+d = 12$. Aus (2*) $\Rightarrow$ $12 = 2d+8$ oder $d = 2$. Wegen $c+2 = 12$ müsste nun gelten: $c = 10$.
Widerspruch zur Einstelligkeit von c.

Aus (3*) $\Rightarrow$ $12 = 2c+3$ oder $2c = 9$. Widerspruch zur Ganzzahligkeit von c.

Somit erfüllt nur das Paar (c,d) = (0, 3) beide Bedingungen (1) und (2) bzw. (1) und (3).

2