Lösungen FÜMO 17 2. Runde Klassenstufe 6

Aufgabe 1

a) Da die drei Summen gleich groß sein müssen, muss die Summe aus den Zahlen von 1 bis 8 und der zweifach verwendeten Zahl ein Vielfaches von 3 sein:

$1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 = 36$. Es sind nur $36 + 3 = 39 = 3 \cdot 13$ und $36 + 6 = 42 = 3 \cdot 14$.
Damit erhält man die angegebene Lösung von Simon mit der zweifach verwendeten 3 und 2
eine weitere Lösung mit der zweifach verwendeten 6:
$1 + \mathbf{6} + 7 = 14$, $2 + 4 + 8 = 14$, $3 + 5 + \mathbf{6} = 14$.

b) Ersetzt man 8 durch 100, erhält man als Summe der acht Zahlen:
$1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 100 = 128$.
Wegen $128 + 100 = 228 = 3 \cdot 76$ erhält man 76 als größtmöglichen Summenwert der drei 1
Summen. Da 100 als Summand vorkommen muss, kann der Summenwert nicht ≤ 76 betragen.

c) Brittas Aufgabe hat keine Lösung, wenn n so groß ist, dass der kleinste Summenwert mit n größer als die Hälfte der Summe der restlichen sechs Zahlen ist.

1. Fall: Ist der kleinste Summenwert mit n die Zahl n+1+1, so ergeben die restlichen Zahlen die Summe 2+3+4+5+6+7 = 27, was jedoch nicht in zwei gleichwertige Summen zerlegt werden kann. 2

2. Fall: Beim nächstkleineren Summenwert n+1+2 kann mit den anderen Zahlen höchstens der Wert 3+4+5+6+7+7=32 erreicht werden. Wenn nun n+1+2 größer als 32:2=16 ist, hat Brittas Aufgabe keine Lösung, also muss n mindestens 14 sein.

Für alle n = 8 bis n = 13 gibt es Lösungen, wie man leicht nachrechnen kann.

Aufgabe 2

Da jede Farbe einmal vorkommt, kann z.B. die Unterseite schwarz sein. Für die Oberseite verbleiben noch 5 Farben, für die Vorderseite 4 Farben, für die Rückseite 3 Farben, für die linke Seite 2 Farben und die rechte Seite ist dann festgelegt. Insgesamt ergeben sich $5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120$ Möglichkeiten, die allerdings noch identische Würfel enthalten. 5

Wie viele Stellungsmöglichkeiten desselben Würfels mit der schwarzen Seite unten gibt es?

Die Oberseite ist als Gegenseite der schwarzen Fläche festgelegt. Jede der vier anderen Seiten kann durch eine einfache Drehung vorne sein. Die anderen Seiten sind dann auch festgelegt. Dieser Würfel kann also nur in vier verschiedenen Stellungen mit schwarzer Unterseite gebracht werden. Insgesamt gibt es also 120 : 4 = 30 verschiedene Bemalungen.

Aufgabe 3

Ist $T_1T_2|M_1M_2|h_1h_2|m_1m_2|s_1s_2$ eine digitale Zeitangabe auf der Kalenderuhr, so ist die Wahl der ersten Ziffern der einzelnen Paare eingeschränkt, nämlich $M_1 \in \{0; 1\}$, $T_1 \in \{0; 1; 2; 3\}$, $h_1 \in \{0; 1; 2\}$ und $m_1, s_1 \in \{0; 1; 2; 3; 4; 5\}$. Um einen möglichst frühen Zeitpunkt zu finden, sollte $M_1 = 0$ sein.

Wählt man $M_2 = 1$ (Januar), so muss $h_1 = 2$, also $h_2 = 3$ sein. Damit steht für T_1 keine Ziffer mehr zur Auswahl.

Wählt man $M_2 = 2$ (Februar), so muss $h_1 = 1$ und $T_1 = 3$ sein, aber der Februar hat höchstens 29 Tage. 5

Sei nun $M_2 = 3$ (März).

Für $T_1 = 1$ wäre $h_1 = 2$ und für h_2 keine Ziffer mehr übrig.

Bei $T_1 = 2$ und $h_1 = 1$ können für T_2 und h_2 auch Ziffern > 5 gewählt werden, weshalb für m_1 und s_1 noch Ziffern 4 oder 5 verwendbar sind.

Das bisherige Ergebnis lautet damit: 2..|03|1..|4..|5..

Um den frühesten Zeitpunkt zu erhalten, werden noch die fehlenden Ziffern 6, 7, 8, 9 von links eingesetzt. Der früheste Zeitpunkt ist damit 26|03|17|48|59,
also der 26. März um 17:48 Uhr und 59 s.