Lösungen FÜMO 17 1. Runde Klassenstufe 8

Aufgabe 1 (5 Punkte)

Eine n-stufige Pyramide enthält innen eine (n-2) stufige Hohlpyramide.
Nun wird der Reihe nach die Pyramide von oben her abgebaut und innen die Hohlräume aufgefüllt.
Am Ende bleiben nur zwei voll aufgefüllte Schichten übrig. Die obere Schicht ist um eine halben Stein auf allen Seiten kürzer.

$\Rightarrow \quad Z(n) = \text{Anzahl der Steine der Pyramide} = 2n^2 - 4\cdot\left(\frac{n-1}{2}+\frac{1}{4}\right) = 2n^2 - 2n + 1 = n^2 + (n-1)^2$

$\Rightarrow \quad Z(2009) = 2009^2 + 2008^2 = 8068145$

oder: Alle von unten aus gezählten ungeraden Pyramidenstufen passen lückenlos ineinander, da die Seitenkanten jeweils um 1 kleiner werden. Es entsteht ein Quadrat mit der Kantenlänge n. Analog ist es mit den geraden Pyramidenstufen. Dabei ist die erste gerade Stufe um 1 kleiner als die erste ungerade Stufe.

$\Rightarrow \quad Z(n) = \text{Anzahl der Steine der Pyramide} = n^2 + (n-1)^2$

oder:

$$Z(n) = \sum_{k=1}^{n}\left(k - 1 + \tfrac{1}{4} - \tfrac{1}{4}\right)\cdot 4 + \tfrac{1}{4}\cdot 4 = 4\cdot\sum_{k=1}^{n} k - 4\cdot\sum_{k=1}^{n} 1 + 1 =$$
$$= 4\cdot\frac{n\cdot(n+1)}{2} - 4n + 1 = 2n^2 + 2n - 4n + 1 = n^2 + \left(n^2 - 2n + 1\right) = n^2 + (n-1)^2$$

Aufgabe 2 (5 Punkte)

$A_{\Delta ABC} = A_{\Delta BB_1C} = A$, gleich lange Grundlinie, gleiche Höhe

$A_{\Delta BB_1C} = A_{\Delta C_1CB_1} = A$, gleich lange Grundlinie, gleiche Höhe

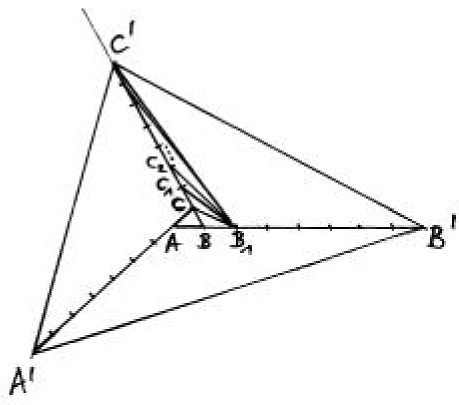
$A_{BB_1C'} = 2009 \cdot A_{\Delta BB_1C} = 2009 \cdot A$, Grundlinie 2009mal so lang, gleiche Höhe

$A_{\Delta BB'C'} = 2008 \cdot A_{\Delta BB_1C'} = 2008 \cdot 2009 \cdot A$

analog:

$A_{\Delta A'CC'} = 2008 \cdot 2009 \cdot A$, $A_{\Delta A'B'A} = 2008 \cdot 2009 \cdot A$

$A_{gesamt} = (3 \cdot 2008 \cdot 2009 + 1) \cdot A = 12102217 \cdot A$



Aufgabe 3 (5 Punkte)

Wir nennen die gesuchte Zahl a. Nach Aufgabenstellung ist die Summe der 2008 aufeinander folgenden Zahlen das Quadrat einer natürlichen Zahl b, d.h. es gilt: $a+(a+1)+ \ldots + (a+2007) = b^2$.
Auf der linken Seite der Gleichung steht eine sog. arithmetische Summe S, die sich mit der Gauss-Formel berechnen und vereinfachen lässt. Es ist nämlich

$S = a+(a+1)+ \ldots + (a+2007) = 2008\cdot a + \frac{2007\cdot 2008}{2} = 2008\cdot\left(a + \frac{2007}{2}\right) = 1004\cdot(2a+2007)$.

Daraus folgt durch geeignete Faktorisierung : $1004\cdot(2a+2007) = 251\cdot 2^2\cdot(2a+2007) = b^2$.
Damit wir aber eine Quadratzahl erhalten, muss $2a+2007 = 251\cdot c^2$ sein. Dabei ist c eine geeignete natürliche Zahl (> 0).
Für c = 1 bzw. c = 2 ist a jeweils negativ. Für c = 3 ergibt sich der kleinste Wert für a aus 2a+2007 = 2259 zu **a = 126**.
Der kleinste Wert für den größten Summand a+2007 ist daher 126 + 2007 = **2133**.