Lösungen FÜMO 16 2. Runde Klassenstufe 5

Aufgabe 1 (5 Punkte)

a) Nicht sichtbar sind die Augenzahlen, die sich unten und zwischen den Würfeln befinden.
Also legt Iris die Würfel so, dass unten stets eine 1 liegt. Die beiden Randwürfel zeigen nach aussen eine 5, also nach innen eine 2. Bei den inneren Würfeln der Reihe sind jeweils zwei gegenüberliegende Zahlen verdeckt, die als Summe stets 7 ergeben.
Die gesamte Augenzahl eines Würfels beträgt $3 \cdot 7 = 21$.
Damit erhält Iris als maximale Summe S
bei 2 Würfeln $S = 2 \cdot 21 – (2 \cdot 1 + 2 \cdot 2) = 42 – 6 = \mathbf{36}$.
bei 3 Würfeln $S = 3 \cdot 21 – (3 \cdot 1 + 2 \cdot 2 + 1 \cdot 7) = 63 – 14 = \mathbf{49}$.
bei 4 Würfeln $S = 4 \cdot 21 – (4 \cdot 1 + 2 \cdot 2 + 2 \cdot 7) = 84 – 22 = \mathbf{62}$.

b) In a) kann man erkennen, dass sich die Summe bei Einfügen eines inneren Würfels um 13 erhöht: Von den 21 Augen sind die 1 unten und die beiden Augenzahlen mit der Summe 7 nicht sichtbar, also kommen $21 – (1 + 7) = 13$ sichtbare Augen hinzu.
Denkt sich Iris zwischen den obigen zwei Würfeln 2006 innere Würfel, so erhält Iris als maximale Summe $36 + 2006 \cdot 13 = 26114$.

c) Iris subtrahiert die 36 von 2008 und untersucht, wie oft die 13 in dem Ergebnis enthalten ist: $(2008 – 36):13 = 1972:13 = 151$ Rest 9. Iris benötigt also mindestens 152 innere Würfel, also insgesamt 154 Würfel. Ein innerer Würfel muss dabei so angeordnet werden, dass er oben eine 2 zeigt, von ihm also genau 9 Augen sichtbar sind.

Aufgabe 2 (5 Punkte)

a				b
c				d
e				f

1	19	7	14	2
16				12
3	17	8	11	4
18				15
5	6	9	13	10

a) Man berechnet zunächst die Summe aller einzutragenden Zahlen: $1 + 2 + 3 + ... + 19 = 190$.
Für die Summe aus den drei Zeilen und den beiden Spalten erhält man $5 \cdot S = 5 \cdot 43 = 215$. Die sechs Zahlen a, b, c, d, e und f kommen bei dieser Summenbildung zweimal vor.
Also muss gelten: $a + b + c + d + e + f = 215 – 190 = 25$.

Wählt man z. B. $a = 1$, $b = 2$, $c = 3$, $d = 4$, $e = 5$ und $f = 10$, so lassen sich zunächst die beiden Spalten und dann die drei Zeilen mit den restlichen Zahlen so auffüllen, dass $S = 43$.

b) Ist $S = 42$, so ist $5 \cdot S = 5 \cdot 42 = 210$.
Also muss gelten: $a + b + c + d + e + f = 210 – 190 = 20$.

Wählt man für a, b, c, d, e und f die kleinstmöglichen Zahlen von 1 bis 6, so erhält man $1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 = 21 > 20$.

Also kann es für $S = 42$ keine Lösung geben.

Aufgabe 3 (5+1 Punkte)

a) Die kleinste Summe von vier zweistelligen Zahlen mit den genannten Bedingungen ist $10 + 25 + 36 + 47 = 118$. Da nur $118:118 = 1$, kann es keine solche zweistellige Zahl geben.

b) Ist der Divisor 90, so kann der Quotient den Wert 2 annehmen, wenn der Dividend 180 ist.
Die Summe der vier Einerziffern muss dann (wegen der 0) 10 bzw. 20, die Summe der vier Zehnerziffern 17 bzw. 16 ergeben. Dies trifft z. B. für die vier Zahlen 12, 43, 57 und 68 zu: $(12 + 43 + 57 + 68) : 90 = \mathbf{2}$.

c) Der Quotient wird möglichst groß, wenn der Dividend möglichst groß und der Divisor möglichst klein ist. Man versucht es deshalb mit dem Divisor 10. In diesem Fall hat der Dividend die Einerziffer 0. Wegen $2 + 3 + 4 + 5 > 10$ muss die Summe der Einerziffern 20 sein, z.B. $8 + 7 + 2 + 3$.
Damit erhält man als größten Quotientenwert: $(98 + 67 + 52 + 43) : 10 = 260 : 10 = \mathbf{26}$.

Wegen $26 \cdot 12 = 312 = 95 + 84 + 73 + 60$ erhält man noch eine zweite Lösung für den Quotientenwert 26: $(95 + 84 + 73 + 60):12 = \mathbf{26}$

Da $26 \cdot 13 = 338 > 90 + 80 + 70 + 60 + 5 + 4 + 2 + 0 = 311$, gibt es keine weitere Lösung.