Lösungen 15. FüMO 2006/2007 2. Runde Klassenstufe 8

Aufgabe 1:

Wir führen folgende Abkürzungen ein:
H … Anzahl Häuser, A … Anzahl Anwohner.
Für H Häuser werden $30\cdot(1+2+\ldots+H) = 15\cdot H\cdot(H+1)$ bezahlt.
Die Anwohner steuern $30\cdot A$ bei und die Stadt gibt 420 Euro dazu.
Der Voranschlag beläuft sich auf $360\cdot H$.
Insgesamt ergibt sich die folgende Kostenaufstellung:

$360\cdot H = 15\cdot H\cdot(H+1) + 30\cdot A + 420$

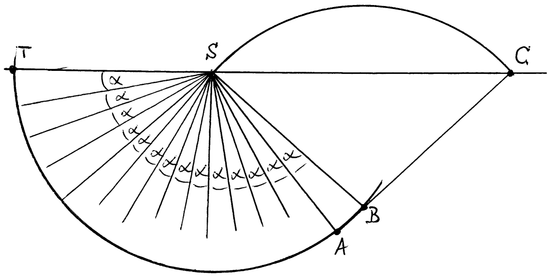
$345\cdot H - 15\cdot H^2 = 30\cdot A + 420 \qquad |\,:15$

$23\cdot H - H^2 = 2A + 28$

$H\cdot(23 - H) = 2A + 28$

Maximal für H =11 oder H = 12
In beiden Fällen ergibt sich als Anwohnerzahl A = 52.

Aufgabe 2:



$$180^\circ = n\cdot\alpha + \left(90^\circ - \frac{1}{2}\cdot\left(180^\circ - \left(90^\circ - \frac{\alpha}{2}\right)\right)\right) =$$

$$= n\cdot\alpha + 45^\circ - \frac{\alpha}{4} = \frac{4n-1}{4}\cdot\alpha + 45^\circ;$$

$$\Rightarrow \quad \alpha = \frac{135^\circ\cdot 4}{4n-1} = \frac{540}{4n-1}\cdot 1^\circ \quad \Rightarrow \quad 1 = \frac{540}{(4n-1)\cdot\alpha}\cdot 1^\circ$$

(4n-1) muss Teiler von 540 sein. α muss auch Teiler von 540 sein.
Ferner muss gelten: $90^\circ < n\cdot\alpha < 180^\circ$, sonst existiert C nicht.

α	1	2	3	4	5	6	9	10	12	15	18	20	27	30	36	45	54	60	90	108	135
4n-1	540	270	180	135	108	90	60	54	45	36	30	27	20	18	15	12	10	9	6	5	4
4n	541	271	181	136	109	91	61	55	46	37	31	28	21	19	16	13	11	10	7	6	5
n	$\notin$N	$\notin$N	$\notin$N	**34**	$\notin$N	$\notin$N	$\notin$N	$\notin$N	$\notin$N	$\notin$N	$\notin$N	**7**	$\notin$N	$\notin$N	**4**	$\notin$N	$\notin$N	$\notin$N	$\notin$N	$\notin$ N	$\notin$ N

Es gibt drei Lösungen: a) $\alpha = 4^\circ$ wird 34 mal angetragen
b) $\alpha = 20^\circ$ wird 7 mal angetragen c) $\alpha = 36^\circ$ wird 4 mal angetragen

Aufgabe 3:

Wegen $108 = 5\cdot 20+8$ folgt:
Wählt man beliebige acht aufeinander folgende Zahlen aus, dann lässt sich ihre Summe S_8 auf einfache Weise berechnen, nämlich als Differenz aus der Summe aller 108 Zahlen und $5\cdot 1000 = 5000$. Das bedeutet aber:
Die Summe S_8 ist eine Konstante unabhängig von der Position des Achterzuges!

Nun ist auch $108 = 13\cdot 8+4$, und aus der Vorbemerkung folgt:
Die Summe S_4 von beliebigen vier aufeinander folgenden Zahlen ist ebenfalls eine Konstante. Also sind alle Zahlen, die vier Plätze weiter hinten stehen jeweils gleich. Nach Voraussetzung hat die Summe von fünf aufeinander folgenden Vierergruppen den Wert 1000, und damit ist $S_4 = 200$.

Schließlich ist $19 = 4\cdot 4+3$ und $50 = 4\cdot 12+2$. $\Rightarrow$ Die 19. Zahl ist demnach gleich der 3. Zahl und die Zahl auf Platz 50 entspricht der Zahl auf Platz 2.
Die vierte Zahl, welcher der Zahl auf Platz 100 entspricht, muss nach dem Gezeigten die Zahl $200 - 1 - 19 - 50 = 130$ sein.