Lösungen 15. FüMO 2006/2007 2. Runde Klassenstufe 5

Aufgabe 1

a) Man muss sich überlegen, welche Lose man im ungünstigsten Falle ziehen könnte, um für zwei beliebige Lose nicht die Summe 12 zu erhalten.
Dies wären die 12 (nicht kombinierbar) und weitere sechs Lose, z.B. 11, 10, 9, 8, 7 3
und 6 oder 1, 2, 3, 4, 5 und 6. Jedes weitere Los liefert ein Paar mit der Summe 12.
D.h. man muss 8 Lose ziehen, um mit Sicherheit ein geignetes Paar dabei zu haben.

b) Im zweiten Fall könnte man ziehen: 12, 12, 11, 11, 10, 10, 9, 9, 8, 8, 7, 7, 6. Jedes weitere Los liefert ein Paar mit der Summe 12. 2
D.h. man muss 14 Lose ziehen, um mit Sicherheit ein geignetes Paar dabei zu haben.

Aufgabe 2

a) Beispiel für eine Stelle für n = 3: 1 2 3 ... 21 **22 2**3 24 ... 2006 2007
Beispiel für eine Stelle für n = 5: 1 2 3 ... 332 **333 33**4 ... 2006 2007 1,5
Beispiel für eine Stelle für n = 7: 1 2 3 ... 1010 **1111 111**2 ... 2006 2007
Für n = 4 werden zunächst zweistellige Zahlen betrachtet:
Da sich zwei aufeinanderfolgende Zahlen in mindestens einer Ziffer unterscheiden ist die Forn xx.xx nicht möglich. Aber auch die Form ax.xx.xb ist nicht möglich, da die Einerziffer x der ersten Zahl ax nicht mit der Einerziffer der zweiten Zahl xx übereinstimmen kann.
Bei den dreistelligen Zahlen ist die Form abc.xxx.xde wegen $x \neq d$ (sonst wären es fünf
gleiche Ziffern!) nicht möglich, da für $x \neq 9$ die Zehnerziffern von xxx und xde überein- 2,5
stimmen müssten. Da nach 999 die Zahl 1000 folgt ist auch x =9 nicht möglich.
Die Form abx.xxx.cde ist nicht möglich, da die Einerziffern von abx und xxx verschieden sind. Die Form axx.xxb ist ausgeschlossen, da die Hunderterziffern für $x \neq 9$ identisch sein müssen; auch der Fall x=9 kann hier nicht auftreten.
Bei den vierstelligen Zahlen könnten nur die Formen a.1111.11b, a111.111b, ab11.1111.c und abc1.1111.d auftreten. Die erste ist nicht möglich, da b = 1 sein müsste (sieben gleiche Ziffern), die zweite ist nicht möglich, da a=1 sein müsste, die dritte und vierte Form kann nicht auftreten, da die Einerziffern von ab11 und 1111 bzw. von abc1 und 1111 nicht jeweils 1 sein können.

b) Chris müsste die gegebene Zahl mindestens bis 9000 fortsetzen, da erst bei 1
123....89999000 genau vier gleiche Ziffern nacheinander erscheinen.

Aufgabe 3

a) Betrachtet man die Summe der Zahlen 4, 5, 17, 19, 24, 31, 46 und 67, so erhält man 213. Da diese Summe ungerade ist, können beide Teilsummen nicht gleich groß sein, die Differenz also nicht 0 sein. Die kleinstmögliche Differenz 1 erhält man für die Teilsummen 107 und 106. Deshalb sucht man nach Zahlen, deren Summenwert 107
oder 106 beträgt. 3
Da 67 in einem von beiden enthalten sein muss, genügt es 107 – 67 = 40 bzw. 106 – 67 = 39 zu betrachten. Man findet schnell 4 + 5 + 31 = 40. Daraus folgt:

$$(4 + 5 + 31 + 67) - (17 + 19 + 24 + 46) = 107 - 106 = 1.$$

b) Für vier aufeinanderfolgende Zahlen gilt: Die Summe der ersten und letzten Zahl ist so
groß wie die Summe der beiden dazwischen, z.B. ist 2004 + 2007 = 2005 + 2006. Dies 2
gilt für jede der nach unten folgenden Vierergruppe. Wegen $2007 = 4 \cdot 501 + 3$ bleiben am Schluss 1, 2 und 3 übrig, die sich geeignet verteilen lassen. Also gilt:

(**2007**+**2004**+2003+2000+ ... +**7**+**4**+3) – (**2006**+**2005**+2002+2001+ ... +**6**+**5**+2+1) = 0