Lösungen 15. FüMO 2006/2007 1. Runde Klassenstufe 8

Aufgabe 1: Lösung

Durch die Platzzahl der Karte wird die Anzahl der Drehungen bestimmt.
Betrachtet man die Karte am 246. Platz.
Es gilt: $246 = 2 \cdot 3 \cdot 41$ und $T_{246} = \{ 1 ; 246 ; 2 ; 123 ; 3 ; 82 ; 6 ; 41 \}$

→ Die Anzahl der Teiler ist gerade (Teiler und $\frac{\text{Zahl}}{\text{Teiler}}$ bilden immer ein Pärchen!)

Damit wird die Karte gedreht, wenn jede 2te, 3te, 6te, 41te, 82te,123te und 246te Karte gedreht wird, d.h. sieben Mal. Der Teiler 1 führt zu keiner Drehung.
So ist die Karte nach den Aktionen rot!
Um eine schwarze Karte zu bekommen, braucht man eine Platzzahl mit einer ungeraden Anzahl von Teilern.

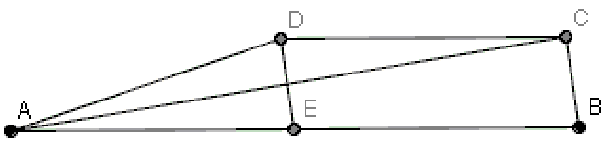
Das haben aber nur die Quadratzahlen ($\frac{\text{Zahl}}{\text{Wurzel}}$ = Wurzel).

Unter den Zahlen bis 2006 gibt es genau 44 Quadratzahlen ($44^2 = 1936$, $45^2 = 2025$).

→ Es sind 44 schwarze Karten

Aufgabe 2: Lösung

a) IWS im Viereck → $\alpha = 36°$
$\alpha + \delta = 5\alpha = 180°$ und α ;δ Wechselwinkel
→ [AB] II [CD]
ΔACD gleichschenklig wegen c = d
→ $\angle ACD = \angle CAD = 18°$ → $\angle BAC = 18°$



b) Es sei E der Schnittpunkt des Lotes von D auf [AC] und [AB]
→ $\angle ACB = 90°$ → AC steht senkrecht auf [BC] und auf dem [DE]
→ [BC] II [DE]
→ Das Viereck EBCD ist ein Parallelogramm
Wegen [AE] = [AD] (ΔAED gleichschenklig wegen $\angle ADE = \angle DEA$)
und [AD] = [DC] und [DC] = [EB] ist E der Mittelpunkt von [DE]
→ Beh. über die Flächenformeln

Aufgabe 3: Lösung

$$B = \frac{2006^{2006}}{(2006!)^2} = \frac{2006}{1 \cdot 2006} \cdot \frac{2006}{2 \cdot 2005} \cdot \frac{2006}{3 \cdot 2004} \cdot \ldots \cdot \frac{2006}{k \cdot (2006 - (k-1))} \cdot \ldots \cdot \frac{2006}{2005 \cdot 2} \cdot \frac{2006}{2006 \cdot 1}$$

$$= 1 \cdot \frac{2006}{2 \cdot 2005} \cdot \frac{2006}{3 \cdot 2004} \cdot \ldots \cdot \frac{2006}{k \cdot (2006 - (k-1))} \cdot \ldots \cdot \frac{2006}{2005 \cdot 2} \cdot 1$$

Sei $1 < k < 2006 \Rightarrow (k-1) \cdot (2006 - k) > 0 \Rightarrow 2006k - k^2 - 2006 + k > 0$

$\Rightarrow -k^2 + 2007k > 2006 \Rightarrow k \cdot (2007 - k) > 2006$

$\Rightarrow$ Jeder Bruch $\frac{2006}{k \cdot (2006 - (k-1))} = \frac{2006}{k \cdot (2007 - k)}$ ist kleiner als1

$\Rightarrow$ B<1 $\Rightarrow$ $2006^{2006} < (2006!)^2$