Lösungen zu FüMO148, 2.Runde

Lösung Aufgabe 1:

Die kleinste 2006-stellige Zahl beginnt mit 1, es folgt 1999 mal die Ziffer 0. Da von den verlangten acht verschiedenen Ziffern bereits zwei auftreten (1 und 0!), sind die letzten sechs Ziffern die noch fehlenden. Es müssen aus den verbliebenen Ziffern 2,3,4,5,6,7,8,9 auf Grund der Minimalität der gesuchten Zahl zwei weitere gestrichen werden.
Da die gesuchte Zahl durch 36 und damit auch durch 9 teilbar sein soll, ist auch die Quersumme durch 9 teilbar. Wenn man die 9 weglässt, ist beim Streichen einer weiteren Ziffer wegen 0+9 = 1+8 = 2+7 = 3+6 = 4+5 = 9 die Quersumme nicht mehr durch 9 teilbar. Die Ziffer 8 kann nicht gestrichen werden, da auch hier mit der zweiten weggelassenen Ziffer (ungleich 1!) die Quersumme nicht mehr durch 9 teilbar ist.
Mit 7 oder 6 müssen zugleich auch die kleinen 2 oder 3 weggelassen werden. Damit streicht man für die kleinste Zahl die Ziffern 4 und 5.
Die letzten beiden Ziffern sollen eine aus möglichst großen Ziffern bestehende Viererzahl bilden, daher muss die letzte Ziffer gerade sein. Dies führt auf die beiden Schlussziffern 96, denn 98 ist nicht durch 4 teilbar.

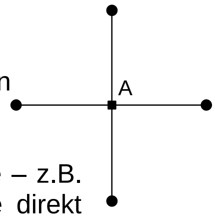
→ Die kleinste Zahl ist $\mathbf{1\,\underbrace{0\,0\,0\,...\,0\;\;0\,0\,0}_{\text{1999 Mal die Ziffer 0}}\;\;2\,3\,7\;\;8\,9\,6}$

5 P.

Lösung Aufgabe 2:

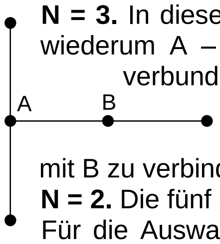
Vorbemerkungen. Da es in Geradien insgesamt nur vier Strecken geben soll, können in einer Stadt höchstens vier Strecken enden. Wenn in jeder Stadt nur eine Strecke endet, kann das Streckennetz nicht zusammenhängend sein, da bei fünf Städten nur je zwei durch genau eine Bahnstrecke verbunden sein können. Die fünfte Stadt wäre dann aber nicht mehr per Bahn erreichbar. Bezeichnet N die Anzahl der in einer Stadt endenden Strecken, dann gilt: $2 \le N \le 4$.
Wir unterscheiden daher nur drei Fälle:

N = 4. Es gibt eine Stadt – wir nennen sie A – die direkt mit den restlichen vier Städten auf die folgende, vereinfachte Weise verbunden ist:



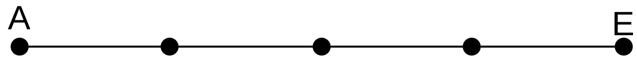
Für die Wahl von A gibt es **fünf** Möglichkeiten und damit **fünf** verschiedene Netze.

N = 3. In diesem Fall hat keine Stadt vier verschiedene Nachbarn, eine der Städte – z.B. wiederum A – hat genau drei Nachbarstädte, mit der sie durch je eine Strecke direkt verbunden ist. Ein mögliches, wiederum vereinfachtes Netz sieht folgendermaßen aus:



Für die Wahl von A gibt es ebenfalls fünf Möglichkeiten, für eine zweite Stadt B bleiben noch vier Möglichkeiten und schließlich drei Möglichkeiten, eine Stadt direkt mit B zu verbinden. Zusammen sind dies 5·4·3 = **60** verschiedene Netze.

N = 2. Die fünf Städte müssen eine Kette bilden wie in der vereinfachten Darstellung:



Für die Auswahl der ersten Stadt A gibt es erneut fünf Möglichkeiten, für die zweite noch vier, für die dritte drei, für die vierte zwei und schließlich noch eine Möglichkeit für die letzte Stadt E. In dieser Zählung wird jede Kette doppelt berücksichtigt (von A nach E bzw. von E nach A). Dies ergibt $\frac{1}{2}\cdot(5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1)=$ **60** zusätzliche Netze. Zusammen könnte es in Geradien **125** verschiedene Eisenbahnnetze geben.

5 P.

Lösung Aufgabe 1:

Betrachtet man die Aussagen A1, A2 und A3 von Alfred, dann gibt es die sechs Möglichkeiten:

	1.Fall	2.Fall	3.Fall	4.Fall	5.Fall	6.Fall
A1	w	w	w	f	f	f
A2	w	f	f	f	w	w
A3	f	w	f	w	f	w

Fall 1 (Primzahl und teilbar durch 7, die Zahl ist größer als 20) führt sofort zu einem Widerspruch.
Fall 2 ist ebenfalls nicht möglich, da sonst n eine Primzahl kleiner als 20 wäre und damit überhaupt keine Aussage von Christine zutreffen würde, was ausgeschlossen ist.
Fall 4 (n keine Primzahl, nicht durch 7 teilbar und kleiner als 20) ist wiederum nicht möglich, da mit Ausnahme von n = 10, Bertram in keinem Fall richtig läge. Denn: C2 und C3 sind auf jeden Fall falsch. Die Zahl n kann aber auch nicht gleich 10 sein. Dann wären alle Aussagen von Eike richtig, was ebenfalls ausgeschlossen ist.
Fall 5 (keine Primzahl, teilbar durch 7 und größer/gleich 20) entfällt ebenfalls, da sonst alle Aussagen von Eike falsch wären.

Fall 6 scheidet aus, da für n nur 14 in Frage käme (kleiner als 20, durch 7 teilbar, keine Primzahl) und damit alle Aussagen von Christine falsch wären.
Damit kann nur Fall 3 eintreten: n ist eine Primzahl, nicht durch 7 teilbar und größer/gleich 20!
→ B1 und B2 sind beide falsch, also muss B3 zutreffen → **Das 11-fache von n ist kleiner als 1000!**
→ C1 und C2 sind falsch, also muss C3 richtig sein →**Das 12-fache von n ist größer als 1000!**
Also muss $n \leq 90$ gelten.
→ Wegen $11 \cdot n < 1000$ und $12 \cdot n > 1000$, ist $83 < n < 91$ und n eine Primzahl → **<u>n = 89</u>** **5 P.**