Lösungen 14. FÜMO 2005/2006 1. Runde Klassenstufe 8

Aufgabe 1:

$105 = s + (s+1) + (s+2) + ... + (s+n) = (n+1)\cdot s + (1+2+...+n) = (n+1)\cdot s + n\cdot(n+1):2$

$\Rightarrow n\cdot(n+1):2 < 105$ weil $(n+1)\cdot s > 0 \Rightarrow n\cdot(n+1) = 210 \Rightarrow n < 15$

$105 = (n+1)\cdot s + n\cdot(n+1):2 = (n+1)\cdot(s+n:2) \rightarrow (n+1)\cdot(2s+n) = 210$

Mit $210 = 2\cdot3\cdot5\cdot7$ treten folgende Fälle auf:

1. Fall: $n+1 = 2 \wedge 2s+n = 105 \rightarrow n = 1 \wedge s = 52 \rightarrow 105 = 52+53$
2. Fall: $n+1 = 3 \wedge 2s+n = 70 \rightarrow n = 2 \wedge s = 34 \rightarrow 105 = 34+35+36$
3. Fall: $n+1 = 5 \wedge 2s+n = 42 \rightarrow n = 4 \wedge s = 19 \rightarrow 105 = 19+20+21+22+23$
4. Fall: $n+1 = 6 \wedge 2s+n = 35 \rightarrow n = 5 \wedge s = 15 \rightarrow 105 = 15+16+17+18+19+20$
5. Fall: $n+1 = 7 \wedge 2s+n = 30 \rightarrow n = 6 \wedge s = 12 \rightarrow 105 = 12+13+14+15+16+17+18$
6. Fall: $n+1 = 10 \wedge 2s+n = 21 \rightarrow n = 9 \wedge s = 6 \rightarrow 105 = 6+7+8+9+10+11+12+13+14+15$

7. Fall: $n+1 = 14 \wedge 2s+n = 15 \rightarrow n = 13 \wedge s = 1 \rightarrow 105 = 1+2+3+4+5+6+ \ldots +11+12+13+14$

5 Punkte

Aufgabe 2:

Dreieck ABC ist rechtwinklig $\rightarrow \beta + \gamma = 90°$
Dreieck ALC ist gleichschenklig mit $\overline{CA} = \overline{CL} \rightarrow 2 \cdot \angle CLA + \gamma = 180°$ (*)

Dreieck ABT ist gleichschenklig mit $\overline{BA} = \overline{BT} \rightarrow 2 \cdot \angle ATB + \beta = 180°$ (**)

$2\cdot\angle CLA + \gamma + 2\cdot\angle ATB + \beta = 2\cdot\angle CLA + 2\cdot\angle ATB + (\beta + \gamma) = 2\cdot(\angle CLA + \angle ATB) + 90° = 360°$
$\rightarrow 2\cdot(\angle CLA + \angle ATB) = 270° \rightarrow \angle CLA + \angle ATB = 135° \rightarrow \angle LAT = 45°$
Wenn Dreieck ALT gleichschenklig sein soll, dann muss A die Spitze sein, weil sonst $\angle CLA = 90°$ [Wiederspruch zu (*)] oder $\angle ATB = 90°$ [Wiederspruch zu (**)] sein müsste.

$\rightarrow \angle CLA = \angle ATB = (180° - 45°) : 2 = 67{,}5° \rightarrow$ Mit (**) gilt dann: $\boldsymbol{\beta = 45°}$

5 Punkte

Aufgabe 3:

7 Mannschaften, jeder gegen jeden → Es sind insgesamt $(7 \cdot 6):2 = 21$ Spiele → Es werden 42 Punkte verteilt.
Die Siegermannschaft spielt 6 Spiele und kann höchstens 12 Punkte gewinnen, die vier letzten Mannschaften tragen $(4 \cdot 3) : 2 = 6$ Spiele untereinander aus und erreichen zusammen mindestens 12 Punkte → Der Erste hat 12 Punkte, die vier Letzten 12 Punkte zusammen.
→ Es bleiben $42 - 2 \cdot 12 = 18$ Punkte für den Zweiten und Dritten.
Da alle verschiedene Endpunktzahlen haben, hat der Zweite 10 und der Dritte 8 Punkte.

gegen	1	2	3	4	5	6	7
1	x	2	2	2	2	2	2
2	0	x	2	2	2	2	2
3	0	0	x	2	2	2	2
4	0	0	0	x			
5	0	0	0		x		
6	0	0	0			x	
7	0	0	0				x

→ Der Zweite hat von seinen 6 Spielen alle außer dem Spiel gegen den Ersten gewonnen und der Dritte hat vier Spiele gewonnen und die Spiele gegen den Ersten und Zweiten verloren.
Durch Probieren findet man für die letzten vier Mannschaften als einzig mögliche Verteilung die unten aufgestellte in der kleinen Tabelle.
Damit hat der Zweite gegen den Vierten gewonnen und das Spiel des Fünften gegen den Sechsten endete unentschieden.

x	1	2	2
1	x	1	2
0	1	x	1
0	0	1	x

5 Punkte