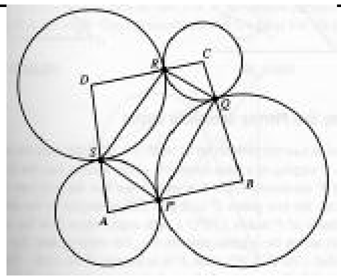
Lösungen 12. FÜMO 2. Runde Klassenstufe 8

Aufgabe 1:



Die Münzen haben die Mittelpunkte A, B, C und D; die Berührpunkte sind gemäß Zeichnung entsprechend mit P, Q, R und S bezeichnet. Da jedes der Dreiecke APS, BQP, CRQ und DSR genau eine Ecke in einer der vier Kreismitten und die beiden anderen Ecken jeweils auf der selben Kreislinie hat, sind alle Dreiecke gleichschenklig. 3

Es ist laut Zeichnung

$$\begin{aligned}\angle RSP+\angle RQP &= (180^0-\angle DSR-\angle ASP) + (180^0-\angle CQR-\angle BQP)\\ &= (180^0-\angle DRS-\angle APS) + (180^0-\angle CRQ-\angle BPQ)\\ &= (180^0-\angle DRS-\angle CRQ) + (180^0-\angle APS-\angle BPQ)\\ &= \angle SRQ + \angle SPQ.\end{aligned}$$

Da die Innenwinkelsumme eines Vierecks 360^0 beträgt, gilt die Gleichheit $\angle RSP+\angle RQP = \angle SRQ + \angle SPQ = 180^0$. Damit ist das Viereck PQRS ein Sehnenviereck, da sich gegenüber liegende Winkelpaare jeweils zu 180^0 ergänzen. Das Viereck besitzt somit einen Umkreis. 2

Summe 5

Aufgabe 2:

a) Alle 16 Kugeln können mit 15 anderen Kugeln kombiniert werden, dabei ist die Reihenfolge ohne Bedeutung. Damit gibt es (16 x 15) : 2 = 120 mögliche Züge.

Gefäß 1: Die 8 schwarzen Kugeln können mit je 8 roten kombiniert werden, d.h. es gibt 8 x 8 = 64 erwünschte Züge → Wahrscheinlichkeit = $\frac{64}{120}$ 1

Gefäß 2: Die 9 schwarzen Kugeln können mit je 7 roten kombiniert werden, d.h. es gibt 9 x 7 = 63 erwünschte Züge → Wahrscheinlichkeit = $\frac{63}{120}$

Gefäß 3: Die 10 schwarzen Kugeln können mit je 6 roten kombiniert werden, d.h. es gibt 10 x 6 = 60 erwünschte Züge → Wahrscheinlichkeit = $\frac{60}{120} = \frac{1}{2}$. 1,5

b) Bei 25 Kugeln gibt es nach a) 300 mögliche Züge. Um eine Wahrscheinlichkeit von 50% zu erzielen, sind 150 ‚günstige' Fälle notwendig. Die erhält man, wenn man 15 schwarze und 10 weiße oder 15 weiße und 10 schwarze Kugeln zur Verfügung hat. 2,5

Summe 5

Aufgabe 3:

m_a ... Mädchenanzahl in 8a vor dem Wechsel, a die Gesamtzahl der Schüler in der 8a,
m_b ... Mädchenanzahl in 8b vor dem Wechsel, b die Gesamtzahl der Schüler in der 8b.

Mädchenanteil vor dem Wechsel in der 8a: $\frac{m_a}{a}$, und nach dem Wechsel in der 8a: $\frac{m_a-1}{a-2}$

Mädchenanteil vor dem Wechsel in der 8b: $\frac{m_b}{b}$, und nach dem Wechsel in der 8b: $\frac{m_b+1}{b+2}$ 1

Betrachte für die 8a den Unterschied $\frac{m_a-1}{a-2} - \frac{m_a}{a} = \frac{(m_a-1)a-m_a(a-2)}{(a-2)a} = \frac{2m_a-a}{(a-2)a} > 0$, 2

da in der 8a mehr Mädchen als Jungen sind.

Betrachte für die 8b den Unterschied $\frac{m_b+1}{b+2} - \frac{m_b}{b} = \frac{(m_b+1)b-m_b(b+2)}{(b+2)b} = \frac{b-2m_b}{(b+2)b} > 0$, 2

da in der 8b mehr Jungen als Mädchen sind.

<u>Ergebnis</u>: Nach dem Wechsel ist in jeder Klasse der Mädchenanteil größer geworden!

Summe 5