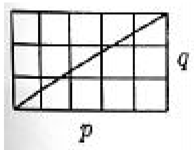
Lösungen 12. FÜMO 1. Runde Klassenstufe 8

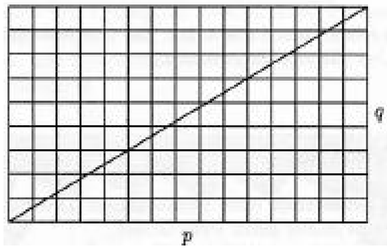
Aufgabe 1:

a) Sind p, q teilerfremd, dann durchquert die Diagonale keine Gitterecken im Inneren des Rechtecks. Durch bloßes Abzählen erkennt man leicht: Es werden 1+(p-1)+(q-1) = p+q-1 Einheitsquadrate echt geschnitten. Für p = 5, q = 3 sind dies 7 Quadrate.



2

b), c) Wenn p, q nicht teilerfremd sind, lassen sich längs der Diagonalen insgesamt ggT(p,q) Teilrechtecke finden mit den Seitenlängen $\frac{p}{ggT(p,q)}$ und $\frac{q}{ggT(p,q)}$. Die Diagonale geht in diesem Fall durch genau ggT(p,q)-1 innere Ecken des Rechtecks. Für jeden Eckdurchgang muss ein Einheitsquadrat in der Zählung subtrahiert werden. Es werden somit insgesamt p+q-1-(ggT(p,q)-1) = p+q-ggT(p,q) Einheitsquadrate geschnitten, für p = 15, q = 9 also genau 21.



4

Summe 6

Aufgabe 2:

a) In einem 3x3-Feld stehen, wenn n die kleinste Zahl ist, immer die Zahlen

n	n+1	n+2
n+7	n+7+1	n+7+2
n+14	n+14+1	n+14+2

2

Für die Summe gilt: S = (n + n+1 + n+2) + (n + n+1 + n+2) + 3*7 + (n + n+1 + n+2) + 3*14
= 9n + 3*1 + 3*2 + 3*7 + 3*14 = 9n + 72 = **9 (n + 8)**

b) Für ein 4x4-Feld gilt: S = 4(n + n+1 + n+2 + n+3) + 4*7 + 4*14 + 4*21 =
= 16n + 4*1 + 4*2 + 4*3 + 24*7 = 16n + 192 = **16 (n + 12)**

2

Summe 4

Aufgabe 3:

Für n = 4 und k = 2 gilt: Es sind 7 Stehtische und 13 Hängematten 1

Allgemein: Durch das Aufspannen der Hängematten wird das Rasendreieck in kleine Dreiecke unterteilt. Die Anzahl der Stehtische entspricht der Anzahl der Dreiecke, die Anzahl der Hängematten ist die Anzahl der Dreiecksseiten. Zur Lösung ist eine Unterscheidung in **k** Pflöcke im Raseninneren und **n – k** Rasenrandpflöcke nötig.

Die Summe aller Innenwinkel der kleinen Dreiecke lässt sich berechnen aus der IWS des Rasendreiecks, den 180°-Winkeln der n-k Randpflöcke und den 360°-Winkeln der k Innenpflöcke:

180° + (n - k) · 180° + k · 360° = 180° · (1 + n + k) => **Es sind 1 + n + k Stehtische** 2

Bei den Hängematten sind alle im Raseninneren hängenden Hängematten Dreiecksseite zu zwei Dreiecken, die am Rand entlang hängenden gehören nur zu einem Dreieck.

Damit alle Hängematten doppelt zählen, addiert man z.B. n – k + 3 (Hängematten am Rasenrand!):

[(1 + n + k) · 3 + (n - k + 3)] : 2 = 3 + 2n + k => **Es sind 3 + 2n + k Hängematten** 2

Möglich ist auch eine Betrachtung, wie viele Stehtische und Hängematten durch einen zusätzlichen Innenpflock, bzw. einen zusätzlichen Randpflock jeweils dazukommen. Daraus kann man die Formeln in Abhängigkeit von n und k herleiten.

Eine perfekte vollständige Induktion nach n und k ist dabei natürlich nicht nötig!

5