Lösungen 11. FÜMO 1. Runde Klassenstufe 8

Aufgabe 1:

a) Wenn eine ungerade Anzahl von Blättchen in einer Farbe eingefärbt ist, muss eines der Blättchen auf der Diagonalen liegen, die anderen können dann symmetrisch einsortiert werden. => Es können maximal fünf Farben (=Felder in der Diagonalen) auf einer ungeraden Anzahl von Blättchen auftreten. Da 25 eine ungerade Zahl ist, gilt: Bei der Zerlegung von 25 in sechs Summanden können nur einer, drei oder fünf ungerade (u) sein und mindestens einer ist gerade (g). Wegen u+u =g gilt: u+g+g+g+g+g = 25 oder u+u+u+g+g+g = 25 oder u+u+u+u+u+g = 25. u+u+g = 25 und u+u+u+u+g = 25 ist nicht möglich. Sieben Farben gehen nicht! Bei der Verteilung 1+1+1+1+1+1+19 = 25 ist z.B. kein symmetrisches Muster möglich. => **Bis 6 Farben** ist das Legen eines diagonalsymmetrischen Musters immer möglich.	2
b) Auf einer Seite der Diagonalen können 10 verschiedenfarbige Blättchen liegen. Mit den dazu symmetrischen Blättchen sind 20 Blättchen farblich festgelegt. Dazu können noch fünf zusätzliche Farben für die Felder auf der Diagonalen kommen. => **Ab 16 Farben** ist das Legen eines diagonalsymmetrischen Musters nicht mehr möglich.	2
Summe	**4**

Aufgabe 2:

a) Für den 21-Drachen mit der Startzahl s gilt: s+(s+1)+...+(s+13) = (s+14)+(s+15)+...+(s+20) => 14s + (1+2+…+13) = 7s+(14+15+…20) => $7s = 7\cdot17 - 7\cdot13$ => s = 4 Der 21-Drachen startet mit 4. Es ist: **4+5+...+17 = 18+19+...+24 = 147**	1
b) Analog zu a) müsste für den 24-Drachen mit der Startzahl s gelten: s+(s+1)+...+(s+15) = (s+16)+(s+17)+...+(s+23) => 16s + (1+2+…+15) = 8s+(16+17+…23) => $8s = 4\cdot39 - 8\cdot15$ => 2s = 9 => s ist keine natürliche Zahl! => **Es gibt keinen 24-Drachen**	2
c) Für die Summe S aller Schwanz- und Kopfzahlen des 99 999-Drachen mit der Startzahl s gilt: S = s + (s+1) + ... + (s+99 998) = 99 999s + (1 + 2 + … + 9 998) Mit Hilfe der Summenformel von Gauß erhält man: S = 99 999s + [(1 + 99 998) · 99 998] : 2 Zusammenhang zwischen einer möglichen ‚Länge n’ des Drachens und seiner Startzahl s: n 3 9 15 21 ... s 1 2 3 4 ... Offenbar lässt sich die Startzahl s wie folgt angeben: s = (n+3) : 6 Für einen 99 999-Drachen lautet demnach die Startzahl $s_{99\,999}$ = 16 667. Damit gilt: S = 99 999 · 16 667 + 99 999 · 49 999 = 99 999 · 66 666 Die gesuchte Schwanzsumme (und auch Kopfsumme) ist die Hälfte davon, also 99999 · 33 333 = **3 333 266 667**.	
Summe	**6**

Aufgabe 3:

a) Die QS einer aus 2002 Ziffern bestehenden Zahl ist höchstens 2002 x 9 = 18018. Das ist die größtmögliche QS. Alle unter 18018 liegende Zahlen kommen auch als QS vor. => Die Zahl 9999 hat die größtmögliche zweite QS, nämlich 36. Da auch alle unter 36 liegende Zahlen als zweite QS vorkommen können, ist 29 die Zahl mit der größten dritten QS. => **Die größtmögliche dritte Quersumme ist 11.**	3
b) Die kleinste Zahl mit QS 11 ist 29. Die kleinste Zahl mit Quersumme 29 (= 3 x 9 + 2) ist 2999. Die kleinste Zahl mit 2002 Ziffern, deren Quersumme 2999 (= 333 x 9 + 2) ist, ist **1 0 0 . . . 0 0 1 9 9 . . . 9 9** , eine Zahl mit **1667 Nullen** und **333 Neunern.**	2
Summe	**5**