Lösungen 10. FÜMO 2. Runde Klassenstufe 8

Aufgabe 1 (5 Punkte)

Man stellt fest:
1. Das Rätsel besteht aus 10 verschiedenen Buchstaben, d.h. es kommen alle Ziffern von 0 bis 9 vor.
2. M kommt als einziger Buchstabe zweimal, jeder der anderen 9 Buchstaben genau einmal vor.

Aus 1. folgt: Z + E + H + N + M + A + L +F + Ü + O = 0+1+2+..+9 = 45, andererseits erhält man für die Summe Z + E + H + N + M + A + L +F + Ü **+ M** + O = 10+13+24 = 47.
Wegen 2. kann man M berechnen: M = 47 - 45 = 2.

Deshalb kommen für die 1. Zeile wegen der Quersumme 10 nur die Ziffern 0,1,3,6 oder 0,1,4,5 in Frage.
Der Fall 0,1,4,5 lässt sich folgendermaßen ausschließen:
Z = 5 führt zu F = 4, aber 4 ist bereits vergeben), Z = 4 führt zu F = 3, dies ist nicht möglich, da die Quersumme von FÜMO 24 betragen soll (**2** + **3** + 8 + 9 < 24), Z = 0 oder 1 ist nicht möglich.

Da F $\neq$ 2, muss Z = 6, also F = 5 sein. Wegen 2 + 5+ 8 + 9 = 24, muss die 3. Zeile aus den Ziffern 2, 5, 8, 9 und damit die 2. Zeile aus den Ziffern 2, 4, 7 bestehen. Schnell findet man nun die einzige Lösung: **6103 - 274 = 5829**

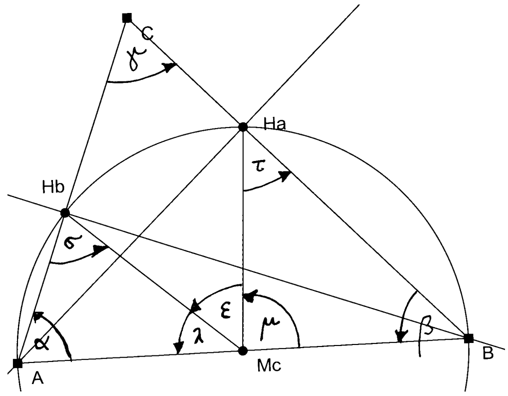
Aufgabe 2 (5 Punkte)

Die Punkte H_a und H_b liegen auf dem Thaleskreis über Strecke [AB] mit Mittelpunkt M_c, daher gilt mit den Bezeichnungen der nebenstehenden Zeichnung $\alpha = \sigma$ und $\beta = \tau$ (gleichschenklige Dreiecke).
Daraus folgt: $\lambda = 180° - 2\alpha$ und $\mu = 180° - 2\beta$.
Ferner gilt: $\varepsilon = 180° - \lambda - \mu$ (gestreckter Winkel).

Daraus folgt: $\varepsilon = 180° - (180° - 2\alpha) - (180° - 2\beta) =$

$= 2\alpha + 2\beta - 180° = 2\alpha + 2\beta + 2\gamma - 180° - 2\gamma =$

$= 2(\alpha + \beta + \gamma) -180° - 2\gamma = 2\cdot 180° - 180° - 2\gamma = 180° - 2\gamma.$



Aufgabe 3 (5 Punkte)

Es sei im Folgenden a, b, c > 0.

Zu zeigen: $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c} \geq \frac{9}{a+b+c}$

Multiplikation mit dem positiven Hauptnenner abc(a + b + c) ergibt die äquivalente Ungleichung
bc(a + b + c) + ac(a + b + c) + ab(a + b + c) $\geq$ 9abc.
Ausmultiplizieren und Subtraktion von 9abc auf beiden Seiten ergibt die äquivalente Ungleichung

$b^2c + bc^2 + a^2c + ac^2 + a^2b + ab^2 - 6abc \geq 0.$

Umsortierung und Ausklammern ergibt

$a(b^2 - 2bc + c^2) + b(a^2 - 2ac + c^2) + c(a^2 - 2ab + b^2) \geq 0.$

Durch Anwendung der Binomischen Formeln erhält man die wahre Aussage

$a(b-c)^2 + b(a-c)^2 + c(a-b)^2 \geq 0.$