Lösungen FÜMO 9 2. Runde Klassenstufe 5

Aufgabe 1 (Lösung):

Da eine Vergößerung der Zahl 2000 nicht sinnvoll ist versucht man zunächst, sie so schnell wie möglich zu verkleinern:
2000 | -2 = **1998** | :3 = **666** | :3 = **222** | :3 = **74** | -2 = **72** | :3 = **24** | :3 = **8** | -2 = **6** (8 Tasten).
Andererseits kann man, von 2001 ausgehend, rückwärts versuchen, in die Nähe einer der obigen Zahlen zu kommen: 4
2001 = **667**·3, 667 = **669** -2, 669 = **223**·3, 223 = **225** - 2, 225 = **75**·3, 75 = **25**·3, 25 = **27** - 2, 27 = **9**·3 (8 Tasten).
Wie kommt man nun am schnellsten von der **6** zur **9**? Natürlich über die 3!
Von den zwei Möglichkeiten
6 | :3 = **2** | -1 = **1** | ·3 = **3** | ·3 = **9** (4 Tasten) bzw. 6 | -2 = **4** | -1 = **3** | ·3 = **9** (3 Tasten)
ist letztere die kürzere. Also schafft man es mit 19 Tastendrücken.

Aufgabe 2 (Lösung):

Da die vier Klammern ein Produkt darstellen, zerlegt man 2001 erst einmal in Primfaktoren:

$$2001 = 3 \cdot 23 \cdot 29.$$

Da die vier Klammern aber 4 Faktoren darstellen, muss man noch einen Faktor 1 hinzufügen: 1

$$2001 = 1 \cdot 3 \cdot 23 \cdot 29 = 29 \cdot 3 \cdot 1 \cdot 23$$

Da a, b, c und d natürliche Zahlen sind, also größer als 0 sind, können die Klammer mit a, die Klammer mit b (wegen b > c) und die Klammer mit d nicht den Wert 1 annehmen.
Also muss in diesem Fall gelten: c = 1.
Wegen b > c erhält man zu folgenden Darstellungen

2001 = 29 · 3 · 1 · 23 die Lösung a = 27, b = 3, c = 1, d = 22,
2001 = 29 · 23 · 1 · 3 die Lösung a = 27, b = 23, c = 1, d = 2, 3
2001 = 23 · 29 · 1 · 3 die Lösung a = 21, b = 29, c = 1, d = 2
2001 = 23 · 3 · 1 · 29 die Lösung a = 21, b = 3, c = 1, d = 28,
2001 = 3 · 23 · 1 · 29 die Lösung a = 2, b = 23, c = 1, d = 28,
2001 = 3 · 29 · 1 · 23 die Lösung a = 2, b = 29, c = 1, d = 22.

Eine Zerlegung von 2001 in zwei Faktoren, die nicht gleich 1 sind, z.B. 2001 = 29 · 69 müsste man durch zwei Faktoren, also durch zweimal den Faktor 1 ergänzen. Da aber, wie oben ausgeführt, nur eine Klammer den Wert 1 annehmen kann, gibt es für solche Fälle keine weiteren Lösungen. 1

Aufgabe 3 (Lösung):

Es sei s = 55 + 56 + 57 + ... + 81 + 82 + 83. Dann enthält s 83 - 54 = **29** Summanden. Davon kann man 28 zu 14 Summen mit gleichem Summenwert zusammenfassen:
s = (55 + 83) + (56 + 82) + ... + (68 + 70) + 69 = 14·138 + 69 = 28·69 + 69 = 29·69 = 2001. 2

Es sei s = 6 + 7 + 8 + 9 + ... + 60 + 61 + 62 + 63. Dann enthält s 63 - 5 = 58 Summanden. Davon kann man **58** zu 29 Summen mit gleichem Summenwert zusammenfassen:
s = (6 + 63) + (7 + 62) + ... + (34 + 35) = 29·69 = 2001.

Es ist 2001 = 3 · 23 · 29. Was oben mit 29 Summanden geklappt hat, könnte man auch mit 3 Summanden versuchen: 2001 : 3 = 667, also kann man schreiben: **666 + 667 + 668 = 2001**
Genauso kann man es mit 23 Summanden versuchen:
2001 : 23 = 87, wobei genau 11 Summanden vor 87 und 11 Summanden nach 87 vorkommen müssen: **76 + 77 + ... + 87 + ... + 97 + 98** = 11·174 + 69 = 1914 + 87 **= 2001**. 4

Mit den Teilern 1, 3 und 23 kann man das ganz oben bei der zweiten Summe verwendete Prinzip anwenden: **1000 + 1001 = 2001**, **331 + 332 + 333 + 334 + 335 + 336 = 2001** und **21 + 22 + ... + 43 + 44 + ... + 65 + 66 = 2001** (2001:23 = 87, 87 = 43+44 = 42+45 = ... = 21+66)