Achte Fürther Mathematik Olympiade

<u>Lösungen der Aufgaben der zweiten Runde</u>

<u>Klassenstufen 7</u>

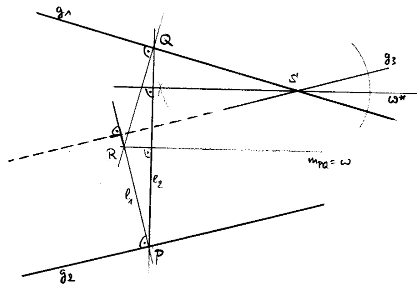
Aufgabe 1:

(I) $z=3k+2$	(I) $35z-70=105k$	1,0
(II) $z=5l+3$	(II) $21z-63=105l$	1,0
(III) $z=7m+4$	(III) $15z-60=105m$	1,0
$z-53=105(l+m-k)=105 \cdot u$ mit $u\in Z$; $z=105\,u+53$		1,0

Aufgabe 2:

a) Zeichne g_1 und g_2 und wähle S auf g_1 Konstruiere die Parallele g_3 durch S zu g_2 Konstruiere die Winkelhalbierende w^* des Winkels zwischen g_1 und g_3 . w^* ist parallel zur gesuchten Winkelhalbierenden w.	1,0
b) Wähle $P \in g_2$ und fälle die Lote l_1 von P auf g_3 und l_2 von P auf w^* . $l_2 \cap g_1=\{Q\}$. m_{PQ} Mittelsenkrechte der Strecke [PQ] . $m_{PQ} \cap l_1=\{R\}$	1,0
c) α = Schnittwinkel von g_1 und g_3 ; $\angle RQP=\angle QPR=\frac{\alpha}{2}$ weil ΔPQR gleichschenklig; $\angle PQS=90° - \frac{\alpha}{2}$ $\Rightarrow RQ\perp g_1$.	1,0
c) $m_{PQ}=w$, weil $m_{PQ} \parallel w^*$ und $\overline{PQ}=\overline{PR}$ und $RP\perp g_2$ und $RQ\perp g_1$	1,0

Zeichnung:



2,0

Aufgabe 3: "Besondere Quadratzahlen"

$4^2 = 16$; $34^2 = 1156$; $334^2 = 111556$; $3334^2 = 11115556$; $33334^2 = 1111155556$; Vermutung: $(\underbrace{3...34}_{\text{n Ziffern}})^2 = \underbrace{1...1}_{\text{n Ziffern}}\underbrace{5...56}_{\text{n Ziffern}}$			0,5
Begründung: : $\underbrace{3\ldots3}_{\text{n Ziffern}}4 \cdot 3 = \underbrace{10\ldots02}_{\text{n Ziffern}}$;			0,5
3334 * 3333 10002 10002 10002 10002 11112222	33334 * 33333 100002 100002 100002 100002 100002 1111122222	Bei jeder weiteren Ziffer 3 in den Faktoren wird bei jedem Einzelergebnis eine 0 eingeschoben und dann ein gleichartiges Zwischenergebnis hinzugefügt. n-stellige Faktoren liefern ein 2n-stellige Ergebnis0 aus n Ziffern 1 und n Ziffern 2.	3
$(\underbrace{3\ldots34}_{\text{n Ziffern}})^2 = \underbrace{1\ldots1}_{\text{n Ziffern}}\underbrace{2\ldots2}_{\text{n Ziffern}} + \underbrace{3\ldots4}_{\text{nZiffern}} = \underbrace{1\ldots1}_{\text{n Ziffern}}\underbrace{5\ldots6}_{\text{n Ziffern}}$			1

oder:

$z_n = (\underbrace{3\ldots\ldots4}_{\text{n Ziffern}})^2 = \left(\frac{10^n-1}{3}+1\right)^2 = \frac{1}{9}\cdot\left(10^n-1+3\right)^2 = \frac{1}{9}\cdot\left(10^n+2\right)^2 = \frac{1}{9}\cdot\left(10^{2n}+4\cdot10^n+4\right) =$	2,0
$= \frac{1}{9}\cdot\left(\left(10^{2n}-1\right)+4\cdot\left(10^n-1\right)+4+1+4\right) = \underbrace{1........1}_{\text{2n Einser}} + 4\cdot\underbrace{1........1}_{\text{n Einser}} + 1 =$	1,5
$= \underbrace{1........1}_{\text{n Einser}}\underbrace{1........1}_{\text{n Einser}} + \underbrace{4........4}_{\text{n Vierer}} + 1 = \underbrace{1........1}_{\text{n Einser}}\underbrace{5........5}_{\text{n Fünfer}} + 1 = \underbrace{1........1}_{\text{n Einser}}\underbrace{5........5}_{\text{n-1 Fünfer}}6$	1,5