Sechste Fürther Mathematik-Olympiade

Klassenstufen 9 / 10

Die Lösungen der 2. Runde

Aufgabe 1:

Zu jedem der Quadrate, die die Bedingung erfüllen, findet man ein umbeschriebenes Quadrat mit Seiten parallel zu den Achsen des Koordinatensystems, das auch die Bedingung erfüllt. Sei ABCD ein solches Quadrat, A seine linke untere Ecke, B seine rechte untere Ecke, a die Länge der Strecke [AB]. Wir denken uns zunächst ABCD fest. Alle möglichen einbeschriebenen Quadrate, die die Bedingung erfüllen, lassen sich z.B. durch den Abstand s charakterisieren, den die Ecke des einbeschriebenen Quadrats, welche auf [AB]liegt, von A hat. Der Abstand s kann die Werte 1 bis a annehmen. (Für s = 0 erhält man das gleiche, mit ABCD übereinstimmende Quadrat wie für s = a.). Dies sind a Möglichkeiten. Für feste Länge a kann nun zusätzlich die Ecke A Koordinaten zwischen 0 und n-a-1 annehmen. Das sind für x und y jeweils n-a Möglichkeiten, insgesamt also (n-a)^2 Positionen für A. Für feste Länge a ergeben sich somit a*(n-a)^2 mögliche Quadrate. a selbst kann die Werte 1 bis n-1 annehmen.
Beispiel für n=5: 1*4*4 + 2*3*3 + 3*2*2 + 4*1*1 = 16 + 18 + 12 + 4 = 40.
Summation von rechts nach links ergibt:

$$\sum_{i=1}^{n-1}(n-i)*i*i = n\sum_{i=1}^{n-1}i^2 - \sum_{i=1}^{n-1}i^3 = n\frac{(n-1)n(2(n-1)+1)}{6} - \frac{(n-1)^2n^2}{4} = \ldots = \frac{n^2(n^2-1)}{12}$$

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	1998
A(n)	0	1	6	20	50	105	196	336	540	825	x

x = A(1998) = (1998*1998)*(1998*1998 - 1)/12 = 3992004 / 12 * 3992003 =
= 332667*3992003 = **1 328 007 662 001** **(6P.)**

Aufgabe 2:

$[A_1A_3]$ teilt das kleine Viereck in zwei Teildreiecke. $\Delta A_1A_2A_3$ ist kongruent zu ΔB_1B_2P nach SWS-Satz! Der übereinstimmende Winkel ergibt sich aus der Parallelität sich entsprechender Seiten. Analog ist $\Delta A_1A_3A_4$ kongruent zu ΔB_3B_4P. Die andere Diagonale $[A_2A_4]$ teilt das kleine Viereck in zwei Teildreiecke, die zu den restlichen Teildreiecken des großen Vierecks kongruent sind. Somit sind je zwei gegenüberliegende Teildreieckedes großen Vierecke inhaltsgleich mit dem kleinen Viereck. Daraus folgt die Behauptung.
(4P.)

Aufgabe 3:

Von jedem Punkt aus M gehen acht Strecken aus.
Fall 1: Es gibt einen Punkt P aus M von dem (mindestens) vier grüne Strecken ausgehen. Ihre von P verschiedenen Endpunkte sollen A, B, C, D heißen. Dann sind die sechs Verbindungsstrecken von A, B, C und D rot (Dreiecks-Bedingung).
Fall 2: Von keinem Punkt aus M gehen vier oder mehr grüne Strecken aus. Dann gehen von jedem Punkt fünf oder mehr rote Strecken aus. Annahme: Von jedem Punkt gehen genau fünf rote Strecken aus. Dan erhalten wir 9*5/2 rote Strecken. 9*5/2=22,5. Widerspruch!. Also gibt es einen Punkt P, von dem aus (mindestens) sechs rote Strecken ausgehen. Ihre von P verschiedenen Endpunkte sollen A, B_1, B_2, B_3, B_4, B_5 heißen. Wir betrachten die fünf von A zu A, B_1, B_2, B_3, B_4, B_5 gehenden Strecken. (Mindestens) drei davon müssen die gleiche Farbe haben. Durch Umnummerieren seien dies B_1, B_2, B_3.
Fall 2.1: Die drei Strecken $[AB_i]$ (i=1,2,3) sind grün. Dann sind die drei Strecken $[B_iB_k]$ (i,k = 1,2,3; i < k) rot und P, B1, B2, B3 die gesuchten Punkte.
Fall 2.2: Die drei Strecken $[AB_i]$ (i=1,2,3) sind rot. $B_1B_2B_3$ darf kein grünes Dreieck sein, also ist eine der drei Dreiecksseiten rot, etwa B_1B_2. Dann sind P, A, B_1, B_2 die gesuchten Punkte. **(5P.)**