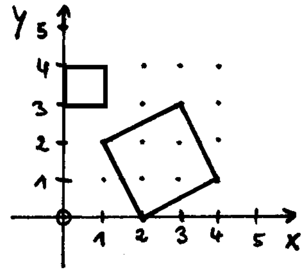
Sechste Fürther Mathematik-Olympiade

Klassenstufen 9 / 10

Die Aufgaben der 2. Runde

Aufgabe 1:

Es sei n eine natürliche Zahl. Wir betrachten alle Quadrate $P_1P_2P_3P_4$, deren Eckpunkte $P_i(x_i|y_i)$ ganzzahlige Koordinaten x_i und y_i in einem kartesischen Koordinatensystem besitzen, die folgende Bedingung erfüllen:
$0 \le x_i < n$ und $0 \le y_i < n$ für i = 1, 2, 3, 4.
Rechts ein Beispiel zwei solcher Quadrate für n = 5:



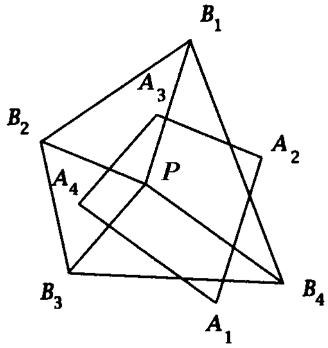
Mit A(n) sei die Anzahl solcher Quadrate bezeichnet.
Ergänze folgende Tabelle. Keine „Computer-Lösung“!

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	1998
A(n)	?	?	?	20	?	?	?	?	?	825	?

Hinweis: $1^2 + 2^2 + 3^2 + ... + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ und $1^3 + 2^3 + 3^3 + ... + n^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$

Aufgabe 2:

Gegeben sind zwei Vierecke $A_1A_2A_3A_4$ und $B_1B_2B_3B_4$. Für i = 1, 2, 3, 4 sind die Strecken $[A_i A_{i+1}]$ und $[PB_i]$ parallel und gleich lang, wobei $A_5 = A_1$ gilt.
Beweise: Viereck $B_1B_2B_3B_4$ besitzt den doppelten Flächeninhalt wie Viereck $A_1A_2A_3A_4$.



Aufgabe 3:

M sei eine Menge von neun verschiedenen schwarzen Punkten, die auf einem Kreis angeordnet sind. Jede der 36 Strecken, die zwei verschiedene Punkte aus M verbinden, ist entweder rot oder grün (bis auf die Endpunkte). Jedes Dreieck mit Eckpunkten aus M hat mindestens eine rote Seite.
Beweise: Es gibt vier Punkte aus M, die nur durch rote Strecken verbunden sind.

Abgabeschluß beim betreuenden Lehrer ist der 15. 5. 1998 (2. Runde).
Für jede Aufgabe ist ein gesondertes Blatt DIN A4 zu verwenden, das mit Namen, Klasse und Schule zu versehen ist.
Zu einer vollständigen Lösung gehört die Angabe und Begründung aller wesentlichen Zwischenschritte.
Auf verwendete Literatur ist hinzuweisen. Die genauen Teilnahmebedingungen sind beim betreuenden Lehrer erhältlich.
Den Lösungen ist der folgende Zettel beizufügen:

✂---

Ich nehme an der 6. Fürther Mathematik-Olympiade (1997/98), Klassenstufen 9/10, 2. Runde teil.

Vorname, Name: ____

Klasse:_____ Schule/Ort:____

Ich bestätige hiermit, alle Aufgaben selbständig gelöst zu haben.

Unterschrift: ______________________________