Sechste Fürther Mathematik Olympiade

Klassenstufen 5 / 6
Die Lösungen der 2. Runde

Aufgabe 1 (Lösung):

Für die Seiten 1 bis 9 benötigt man 9 Ziffern, für die Seiten 10 bis 99 genau $90 \cdot 2 = 180$ Ziffern,
für die Seiten 100 bis 999 genau $900 \cdot 3 = 2700$ Ziffern, für die Seiten 1000 bis 1998 genau 2
$999 \cdot 4 = 3996$ Ziffern.
Für die Seiten 1 bis 1998 werden deshalb 9+180+2700+3996 = 6885 Ziffern benötigt.

Für ein Buch mit 99 Seiten werden 189, für ein Buch mit 999 Seiten 2889 Ziffern benötigt.
Da 189 < 1998 < 2898 ist, muss die Seitenzahl des zweiten Buches aus drei Ziffern bestehen. 3
Für die dreistelligen Seitenzahlen werden deshalb 1998 - 189 = 1809 Ziffern benötigt, was einer
Seitenzahl von 1809:3 = 603 entspricht. Also hat das Buch insgesamt 99+603 = 702 Seiten

Aufgabe 2 (Lösung):

Franz nummeriert die Münzen von 1 bis 8:
Dann legt er zum Beispiel 5 auf 2, 3 auf 7,
4 auf 1 und 6 auf 8. 2

1 2 3 4 5 6 7 8

Hat Franz mehr als 8 Münzen, zum Beispiel 1998, so kann er die Zahl der Münzen, aus denen er
Paare bilden soll, auf folgende Weise um zwei reduzieren:
Er legt vom Anfang der Reihe aus gesehen die vierte Münze auf die erste und erhält damit ein Paar,
das ganz am Anfang liegt. Die Anzahl der restlichen nebeneinanderliegenden Münzen ist um zwei
geringer als zu Beginn. Franz setzt dieses Verfahren jeweils mit den restlichen Münzen so lange 3
fort, bis nur noch acht nebeneinanderliegende Münzen übrig bleiben, für die er eine Lösung kennt.

Aufgabe 3 (Lösung):

Multipliziert man zwei oder mehrere Zahlen, die alle die Einerziffer 1 bzw. 5 bzw. 6 haben,
miteinander, so hat das Produkt wegen $1 \cdot 1 = 1$ bzw. $5 \cdot 5 = 25$ bzw. $6 \cdot 6 = 36$ auch wieder die
Einerziffer 1 bzw. 5 bzw. 6.

Zuerst bestimmt man die Einerziffer von 2^{1998} :

Es ist $2^{1998} = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot 2 = (2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2) \cdot (2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2) \cdot \ldots \cdot (2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2) \cdot (2 \cdot 2)$ ein Produkt aus 1998 1,5
Faktoren, von denen sich $1996 = 399 \cdot 4$ in 399 Produkte zu je vier Faktoren zerlegen läßt.
Wegen $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 16$ hat das Produkt dieser Faktoren wieder die Einerziffer 6.
Da $6 \cdot 2 \cdot 2 = 24$, muss 2^{1998} die Einerziffer 4 haben.

Auf die gleiche Weise kann man die Einerziffer von 3^{1998} bestimmen:
Es ist $3^{1998} = 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot 3 = (3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3) \cdot (3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3) \cdot \ldots \cdot (3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3) \cdot (3 \cdot 3)$. 1,5
Wegen $3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 81$ hat das Produkt der ersten 1996 Faktoren die Einerziffer 1.
Da $1 \cdot 3 \cdot 3 = 9$, muss 3^{1998} die Einerziffer 9 haben.

Da die Zahl 5^{1998} die Einerziffer 5 haben muss, 1
ergibt sich wegen $4 + 9 + 5 = 18$ für die Zahl n die Einerziffer 8. 1