LÖSUNGEN ZUR ZWEITEN RUNDE 1997/98

Lösung (*Aufgabe* **1**, Runde II, FÜMO VI, Jgst. **11**)

Es gelte: $p(a) = p(b) = p(c) = p(d) = 1991$ für $a \neq b \neq c \neq d \in \mathbb{Z}$.
Die Gleichung $p(x) - 1991 = 0$ besitzt dann vier verschiedene Lösungen a,b,c und d.
Das Polynom $p(x) - 1991$ läßt sich folgendermaßen darstellen:
$p(x) - 1991 = (x-a)(x-b)(x-c)(x-d)\cdot q(x)$ wobei $q(x)$ ein Polynom vom Grad $n - 4$ mit ganzzahligen Koeffizienten ist.
Annahme $p(n) = 1998$ für gewisse $n \in \mathbb{Z}$ $\Rightarrow$ $p(n) - 1991 = 1998 - 1991 = 7 = (n-a)(n-b)(n-c)(n-d)\cdot q(n)$.
Damit wäre die Primzahl 7 als Produkt von mindestens vier verschiedenen ganzzahligen Faktoren darstellbar. Dies ist eine Widerspruch!
Also ist die Annahme falsch und die Behauptung wahr. ♦

Lösung (*Aufgabe* **2** , Runde II, FÜMO VI, Jgst. **11**)

Wegen ii) gilt auch

$$f(1) + f(2) + \ldots + f(n-1) = (n-1)^2 f(n-1)$$

und damit $\quad (n-1)^2 f(n-1) + f(n) = n^2 f(n)$

oder $\quad (n-1)^2 f(n-1) = (n^2-1) f(n)$.

Man erhält die Rekursionsgleichung: $f(n) = \frac{(n-1)^2}{n^2-1}\cdot f(n-1) = \frac{n-1}{n+1}\cdot f(n-1)$.

Wendet man diese Beziehung mehrmals hintereinander an, ergibt sich schließlich (nach Kürzen):

$f(n) = \frac{n-1}{n+1}\cdot f(n-1) = \frac{n-1}{n+1}\cdot\frac{n-2}{n}\cdot f(n-2) = \cdots = \frac{(n-1)(n-2)(n-3)\cdot\ldots\cdot 2\cdot 1}{(n+1)n(n-1)\cdot\ldots\cdot 4\cdot 3}\cdot f(n) = \frac{2\cdot f(1)}{n(n+1)}$ und wegen

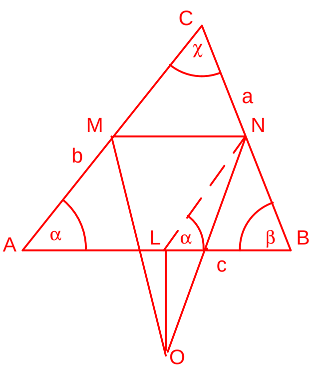
$f(1)=999$ folgt daraus $\quad \mathbf{f(1998)} = \frac{2\cdot 999}{1998\cdot 1999} = \underline{\mathbf{\frac{1}{1999}}}$. ♦

Lösung (*Aufgabe* **3,** Runde II, FÜMO VI, Jgst. **11**)

Betrachte Dreieck ONL: ρ OLN = $90^0 + \alpha$
(LN ist Mittellinie im Δ ABC $\Rightarrow$ LN$\|$AC)
Kosinussatz über $\overline{ON} \Rightarrow$

$$\overline{ON}^2 = \overline{OL}^2 + \overline{LN}^2 - 2\cdot\overline{OL}\cdot\overline{LN}\underbrace{\cos(90^0+\alpha)}_{-\sin\alpha}$$

$$= \frac{c^2}{4}+\frac{b^2}{4}+2\cdot\frac{c}{2}\cdot\frac{b}{2}\cdot\sin\alpha \Rightarrow \underline{\overline{ON}^2 = \frac{c^2}{4}+\frac{b^2}{4}+\frac{bc}{2}\sin\alpha} \quad (*)$$



$$\left.\begin{array}{l}\text{Kosinussatz im Dreieck ABC} \Rightarrow c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma \\ \text{Sinussatz im Dreieck ABC} \Rightarrow \frac{c}{a} = \frac{\sin\gamma}{\sin\alpha} \Rightarrow c\cdot\sin\alpha = a\cdot\sin\gamma\end{array}\right\} \text{Eingesetzt in } (*) \text{ liefert:}$$

$$\overline{ON}^2 = \frac{b^2}{4} + \frac{a^2+b^2-2ab\cos\gamma}{4} + \frac{ab\sin\gamma}{2} = \frac{a^2}{4}+\frac{b^2}{2}-\frac{ab}{2}\cdot\cos\gamma+\frac{ab}{2}\cdot\sin\gamma$$

$$= \frac{a^2}{4}+\frac{b^2}{2}-\frac{ab}{2}(\cos\gamma - \sin\gamma).$$

Nun gilt z.B. $\cos(\gamma + 45^0) = \frac{1}{2}\sqrt{2}\cos\gamma - \frac{1}{2}\sqrt{2}\sin\gamma$ woraus unmittelbar folgt:

$$\cos\gamma - \sin\gamma = \frac{\cos(\gamma+45^0)}{\frac{\sqrt{2}}{2}} \quad \Rightarrow \overline{ON}^2 = \frac{a^2}{4}+\frac{b^2}{2}-\frac{ab}{\sqrt{2}}\cos(\gamma+45^0).$$

Nun wird aber $\cos(\gamma + 45^0)$ <u>minimal</u> für $\gamma + 45^0 = 180^0$ oder $\underline{\gamma = 135^0}$.

Der Maximalwert von $\overline{ON}$ berechnet sich dann zu: $\underline{\overline{ON} = \sqrt{\frac{a^2}{4}+\frac{b^2}{2}+\frac{ab}{\sqrt{2}}} = \sqrt{\left(\frac{a}{2}+\frac{b}{\sqrt{2}}\right)^2} = \frac{a}{2}+\frac{b}{\sqrt{2}}}$.

Analog erhält man für den Maximalwert von $\overline{OM}$: $\underline{\overline{OM} = \frac{b}{2}+\frac{a}{\sqrt{2}}}$.

Addition beider Terme ergibt den größten Wert, den die Streckensumme annehmen kann:

$$\underline{\underline{\overline{OM}+\overline{ON}}} = \left(\frac{b}{2}+\frac{a}{\sqrt{2}}\right)+\left(\frac{a}{2}+\frac{b}{\sqrt{2}}\right) = a\left(\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{2}\right)+b\left(\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{2}\right) = \underline{\underline{\frac{1}{2}(1+\sqrt{2})(a+b)}}$$ ♦