Sechste Fürther Mathematik-Olympiade

Klassenstufen 9 / 10

Die Lösungen der 1. Runde

Aufgabe 1:

Die Figur ist symmetrisch zur Gerade AM. Daher liegt der Mittelpunkt M_k des kleinen Kreises k auf AM. Die Berührpunkte der Kreise K und k mit der Dreiecksseite AB sollen F und F_k heißen. Die Strecken $[MF]$ und $[M_kF_k]$ sind wegen der Tangenteneigenschaft der Dreiecksseite AB Lote zu AB. Daher besitzen die Dreiecke FMA und F_kM_kA Innenwinkel von 90° und 30° (halber Winkel α), somit auch von 60°. Sie sind also „halbe gleichseitige Dreiecke“. Daraus folgt: $\overline{M_k A} = 2\overline{M_k F_k} = 2r$ und $\overline{MA} = 2\overline{MF} = 2R$. Andererseits läßt sich die Strecke [MA] zerlegen: $\overline{MA} = R + r + \overline{M_k A}$, also 2R = R + r + 2r. Es folgt: R : r = 3 : 1.

Aufgabe 2:

Wir führen ein kartesisches Koordinatensystem ein, dessen Achsen parallel zu den Seiten der Quadrate aus M verlaufen.

Die Mittelpunkte der n Quadrate sollen die Koordinaten $(x_1 \mid y_1)$, $(x_2 \mid y_2)$, ...,$(x_n \mid y_n)$ besitzen.

Sei nun $x_m = \min\{x_i \mid i = 1, 2,..., n\}$ und $x_M = \max\{x_i \mid i = 1, 2,..., n\}$. Wir bilden das arithmetische Mittel $x = (x_m + x_M)/2$. Seien y_m, y_M und y analog definiert.

Wir behaupten: Das Quadrat Q mit Mittelpunkt $(x \mid y)$ und mit zu den Seiten der Quadrate der Menge M parallelen Seiten hat mit jedem der n Quadrate aus M mindestens einen Punkt gemeinsam.

Beweis: Sei $i \in \{1, 2,..., n\}$ beliebig gewählt. Wir betrachten zunächst nur die x-Koordinaten. Sicherlich gilt $x_m \le x_i \le x_M$. Wegen Bedingung c) gilt ferner $x_M - x_m \le 2$. x_i liegt also in einem Intervall der maximalen Breite 2 und ist daher von der Intervallmitte x höchstens eine Längen-einheit entfernt. (Der Abstand $| x_i - x |$ läßt sich auch mit Fallunterscheidung abschätzen).

Analog folgt $| y_i - y | \le 1$, also hat das Quadrat Q mit dem Quadrat Nummer i aus der Menge M sicher einen Punkt gemeinsam.

Aufgabe 3:

Zähler und Nenner der Brüche lassen sich faktorisieren:

$T(n) = \dfrac{n^3 - 1}{n^3 + 1} = \dfrac{(n-1)(n^2 + n + 1)}{(n+1)(n^2 - n + 1)} = \dfrac{a_n \cdot b_n}{c_n \cdot d_n}$ mit den Abkürzungen $a_n = n - 1$, $b_n = n^2 + n + 1$, $c_n = n + 1$ und $d_n = n^2 - n + 1$.

Vergleicht man die Faktorisierungen aufeinanderfolgender Brüche, so erkennt man:

$d_{n+1} = (n + 1)^2 - (n + 1) + 1 = n^2 + n + 1 = b_n$ und $a_{n+2} = (n + 2) - 1 = n + 1 = c_n$.

Wir bilden das Produkt der 99 Brüche T(2), T(3),... T(100) und sortieren die Faktoren um:

$$\frac{a_2 b_2}{c_2 d_2} \cdot \frac{a_3 b_3}{c_3 d_3} \cdot \frac{a_4 b_4}{c_4 d_4} \cdot \ldots \cdot \frac{a_{98} b_{98}}{c_{98} d_{98}} \cdot \frac{a_{99} b_{99}}{c_{99} d_{99}} \cdot \frac{a_{100} b_{100}}{c_{100} d_{100}} = \frac{a_2 a_3 a_4 \ldots a_{98} a_{99} a_{100}}{c_2 c_3 c_4 \ldots c_{98} c_{99} c_{100}} \cdot \frac{b_2 b_3 b_4 \ldots b_{98} b_{99} b_{100}}{d_2 d_3 d_4 \ldots d_{98} d_{99} d_{100}}$$

Nun läßt sich a_4 mit c_2, a_5 mit c_3,... a_{100} mit c_{98} kürzen, ebenso b_2 mit d_3, b_3 mit d_4,..., b_{99} mit d_{100}. Nur a_2, a_3, c_{99}, c_{100}, b_{100} und d_2 haben keinen „Partner“ zum Kürzen. Wir erhalten gekürzt als Produkt der 99 Brüche: $\dfrac{a_2 a_3 b_{100}}{c_{cc} c_{100} d_2} = \dfrac{1 \cdot 2 \cdot (100^2 + 100 + 1)}{100 \cdot 101 \cdot (2^2 - 2 + 1)} = \dfrac{2 \cdot 10101}{3 \cdot 10100} > \dfrac{2}{3}$, da 10101 > 10100