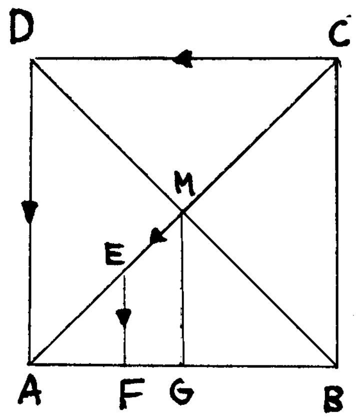
Sechste Fürther Mathematik-Olympiade

Klassenstufe 11

Die Lösungen der 1. Runde

Lösung Aufgabe 1

Das Mädchen kann der Lehrerin entwischen. Gemäß Zeichnung gilt nämlich:



Die Lehrerin stehe an der Ecke C. Folgender Fluchtweg ist für die Schülerin günstig: Es schwimmt in M (diagonal) in Richtung A los. Im selben Moment läuft die Lehrerin in Richtung Ecke D (oder B). Wenn sie Ecke D erreicht hat, soll sich die Schülerin in E befinden. *Danach schwimmt sie rechtwinklig auf den Beckenrand AB zu.*

Begründung zu dieser Wegwahl:

Es sei $\overline{CD} = 1 \Rightarrow \quad \overline{BC} = \frac{1}{3}$, da $v_L = 3 \cdot v_S$.

$\overline{CA} = \sqrt{2}$ (Diagonalenlänge) $\Rightarrow \overline{EA} = \frac{1}{2}\sqrt{2} - \frac{1}{3} = \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{3} > 0.$

Bestimmung von $\overline{EF}$ mit Strahlensatz (denn $EF \perp AB$):

$$\frac{\overline{EF}}{\overline{MG}} = \frac{\overline{EA}}{\overline{MA}} = \frac{\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{3}}{\frac{1}{\sqrt{2}}} \Rightarrow \overline{EF} = \frac{1}{2} \cdot \left(1 - \frac{\sqrt{2}}{3}\right) = \frac{1}{2} - \frac{1}{3\sqrt{2}}.$$

Die Lehrerin kann nur nach A rennen. Aber sie erreicht Ecke A *nicht bevor* die Schülerin am Beckenrand in F bereits angekommen ist, denn nach Zeitvergleich gilt (mit $v_L = 3 \cdot v_S$):

$$t_L - t_S = \frac{1}{3v_S} - \frac{\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3\sqrt{2}}\right)}{v_S} = \frac{1}{v_S}\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{3\sqrt{2}}\right) = \ldots = \frac{1}{v_S} \cdot \frac{\sqrt{2} - 1}{6} > 0 \Rightarrow$$

$t_L > t_S \quad \Rightarrow$ Beh.

♦

Lösung Aufgabe 2

Es gelte: $\quad n = 3x^2 + 32y^2$.

Daraus : $\quad 96n = 96 \cdot 3x^2 + 96 \cdot 32y^2 = 3 \cdot 32 \cdot 3x^2 + 3 \cdot 32 \cdot 32y^2 = 3 \cdot (32y)^2 + 32 \cdot (3x)^2$.

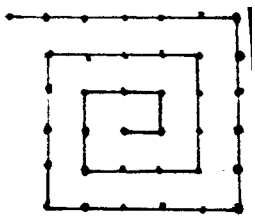
Der Term 96n besitzt also ebenfalls die Darstellung $\mathbf{3 \cdot x_1^2 + 32 y_1^2}$ mit $x_1 = 32y$ und $y_1 = 3x$.

Nun ist $\quad \mathbf{97 \cdot n = n + 96 \cdot n}$

$$\begin{aligned}
&= 3x^2 + 32y^2 + 3(32y)^2 + 32(3x)^2 = \\
&= 3[x^2 + (32y)^2] + 32[y^2 + (3x)^2] = \\
&= 3[(x+32y)^2 - 64xy] + 32[y^2 + (3x)^2] = \quad \text{(Qu. Erg.)} \\
&= 3[(x+32y)^2] - 192xy + 32[y^2 + (3x)^2] = \\
&= 3[(x+32y)^2] - \ 32 \cdot 6xy + 32[y^2 + (3x)^2] = \\
&= 3(x+32y)^2 + 32 \ \underbrace{\left[y^2 - 6xy + (3x)^2\right]}_{binom.Formel} = \\
&= 3(x+32y)^2 + 32(y-3x)^2 = \\
&= \mathbf{3 \cdot x_2^2 + 32 \cdot y_2^2} \text{ mit geeigneten positiven Zahlen } \mathbf{x_2 = x+32y} \text{ und } \mathbf{y_2 = y - 3x}.
\end{aligned}$$

$\Rightarrow$ **97·n ist günstig**. ♦

Lösung Aufgabe 3



Am besten löst man zuerst Teil c) der Aufgabe.

Verbinde die Punkte P_1, P_2, P_3 , ... zu einem spiralförmigen Streckenzug. Die Teilstrecken haben die Längen 1,1,2,2,3,3,4,4,5, ...

Also besitzen die jeweils rechts oben liegenden Eckpunkte P(1/1), P(2/2), P(3/3), ... die Nummern

$1+2\cdot 1 = 3$, $1+2\cdot(1+2+3) = 13$, $1+2\cdot(1+2+3+4+5) = 31$, usw.

Allgemein gilt : Punkt $P_n(k/k)$, $(k \geq 1)$ besitzt die Nummer

$$\mathbf{n} = 1+2\cdot(1+2+3+ \ldots +2k - 1) = 1+2\cdot\underbrace{\frac{(2k-1)\cdot 2k}{2}}_{Gauss-Formel} = \mathbf{4k^2 - 2k + 1}.$$

a) Für $k = 22$ ist $n = 1893 < 1997$.
Für $k = 23$ ist $n = 2071 > 1997$.
Geht man vom Spiraleneckpunkt $P_{1893}(22/22)$ um 44 Einheiten nach links, so kommt man zum nächsten Eckpunkt $P_{1937}(-22/22)$, geht man weitere 44 Einheiten nach unten, gelangt man zum nächsten Eckpunkt $P_{1981}(-22/-22)$. Nach weiteren 16 Schritten nach rechts gelangt man schließlich zum Punkt $P_{1997}(-6/-22)$.

b) Der Punkt $P_n(1998/1998)$ hat die Nummer $n = 4\cdot 1998^2 - 2\cdot 1998 + 1 =$ **15 964 021**.
Also besitzt der nachfolgende Punkt $P_x(1997/1998)$ die Nummer **x = 15 964 022**. ♦